

В. МРОЧЕНЪ

# ПРЯМОЛИНЕЙНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

И ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ  
ГОНИОМЕТРИЧЕСКИХЪ  
== ФУНКЦІЙ ==

Ученымъ Комитетомъ М. Н. Пр. допущена въ качествѣ  
руководства для среднихъ учебныхъ заведеній

2-е исправленное изданіе

---



ИЗДАНІЕ  
Т-ВА М. О. ВОЛЬФЪ

С.-Петербургъ

Москва

Гостинный Дв., 18 и Невскій, 13 || Кузн. Мостъ, 12 и Моховал, 22

1913



ПЕЧАТАТИ ПОГРФІН  
Т-ЕА М-О-ВОМФЪ  
С ПЕТЕРБУРГЪ - ЕАЕ - ОУТРА ІБАНІІЗ СЪБ ДОНА  
1913

## ОГЛАВЛЕНИЕ I ЧАСТИ.

|                                                                                                                                                                                         |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Историческій очеркъ. . . . .                                                                                                                                                            | 1  |
| Офіціальная программа тригонометріи. . .                                                                                                                                                | 3  |
| Введеніе. . . . .                                                                                                                                                                       | 3  |
| I. Отсутствіе пропорціональности между сторо-<br>нами и углами треугольника.—II. Графическій<br>способъ рѣшенія треугольника.                                                           |    |
| Глава I. Синусъ и косинусъ. . . . .                                                                                                                                                     | 10 |
| 1. Происхожденіе синуса и косинуса.—3. Опре-<br>дѣленія.—5. Синусъ и косинусъ дополнитель-<br>ныхъ угловъ.—6. Уравненіе синуса и коси-<br>нуса.—7. Измѣненіе синуса и косинуса.         |    |
| Глава II. Таблицы натуральныхъ синусовъ и<br>косинусовъ . . . . .                                                                                                                       | 16 |
| 9. Связь между синусомъ и хордою.—14 Та-<br>блицы натуральныхъ тригонометрическихъ вели-<br>чинъ.—Примѣры.                                                                              |    |
| Глава III. Рѣшеніе прямоугольныхъ треуголь-<br>никовъ при помощи синуса и косинуса                                                                                                      | 23 |
| 17. Формулы. Примѣры.                                                                                                                                                                   |    |
| Глава IV. Рѣшеніе прямоугольныхъ треуголь-<br>никовъ при помощи тангенса и котан-<br>генса . . . . .                                                                                    | 26 |
| 19. Определенія.—20. Формулы. 21. Вычисленіе<br>тангенсовъ и котангенсовъ.—22. Измѣненія тан-<br>генса и котангенса.—23. Формулы для рѣше-<br>нія прямоугольнаго треугольника.—Примѣры. |    |
| Глава V. Таблицы логарифмовъ тригонометри-<br>ческихъ величинъ. . . . .                                                                                                                 | 31 |
| 24. Недостатки натуральныхъ таблицъ.—26. Ло-<br>гарифмическія таблицы.—27. Расположеніе ло-<br>гарифмическихъ вычисленій.—Примѣры.                                                      |    |
| Задачи для рѣшенія . . . . .                                                                                                                                                            | 39 |
| Глава VI. Тригонометрическія величины угловъ<br>косоугольнаго треугольника . . . . .                                                                                                    | 42 |
| 28. Определенія. — 31. Правило Декарта. —<br>32. Избытокъ тупого угла.—33. Пополнитель-                                                                                                 |    |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ные углы. 34. Тригонометрическія величины угла въ 180°.—Примѣры.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | стр. |
| Глава VII. Теоремы и формулы. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 48   |
| 36. Теорема синусовъ. 37. Слѣдствія.—38. Теорема тангенсовъ.—39. Формулы Герона.—40. Формулы периметровъ.—41. Формула Регіомонтануса.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |      |
| Глава VIII. Рѣшеніе косоугольныхъ треугольниковъ. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 55   |
| 42. Основные случаи.—Примѣры.—43. Изслѣдованіе сомнительнаго случая.—Задачи.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |      |
| Глава IX. Приложеніе тригонометріи къ геодезій . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 65   |
| 46. Задача геодезій.—47. Опредѣленіе положенія точки въ пространствѣ.—51. Главные типы задачъ.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |      |
| Задачи для рѣшенія . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 74   |
| Глава X. Особенные случаи рѣшенія прямоугольныхъ треугольниковъ. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 79   |
| 53. Обозначенія.—54. Первая группа заданій.—Вторая группа заданій.—56. Формула катетовъ.—Заданія на формулу катетовъ.—58. Формулы Гаусса.—Заданія на формулы Гаусса.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |      |
| Глава XI. Особенные случаи рѣшенія косоугольныхъ треугольниковъ. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 86   |
| 60. Обозначенія.—61. Случай, въ которыхъ примѣняется теорема синусовъ.—Случай, основанный на рѣшеніи частныхъ треугольниковъ.—Случай, основанный на рѣшеніи вспомогательнаго треугольника $ACE$ .—64. Формулы Мольвейде.—65. Формулы высотъ.—66. Теорема высотъ.—67. Формула Герона.—68. Формула $F = \frac{a b c}{4 R}$ .—69. Теорема котангенсовъ.—70. Формула $R p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ .—71. Теорема радиусовъ.—72. Заданія на выведенныя формулы. |      |
| Отвѣты и рѣшенія. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 94   |

## ИСТОРИЧЕСКІЙ ОЧЕРКЪ.

1. Исторія развитія тригонометріи замѣчательна въ трехъ отношеніяхъ. *Во I-хъ*, это единственный пока уголокъ знанія, представляющій законченную и цѣльную картину, въ которой все разработано и выяснено. *Во II-хъ*, зарожденіе и развитіе тригонометріи поразительно ясно доказываетъ, что математика не вышла изъ мозга геніевъ, какъ Минерва изъ головы Зевса, а создалась и разрабатывалась все время на чисто практической почвѣ, въ зависимости отъ потребностей момента. *Въ III-хъ*, она имѣетъ важное педагогическое и методическое значеніе. *Педагогическое*—потому что знакомитъ съ тѣми колоссальными усиліями ума и воли отдѣльныхъ лицъ и даже цѣлыхъ школъ, которыя создали наконецъ столь простой, совершенный и распространенный механизмъ тригонометрическихъ вычисленій. Эти усилія должны быть достойно оцѣнены наравнѣ съ ихъ плодами и несомнѣнно окажутъ вліяніе на воспитаніе сужденія. *Методическое*—такъ какъ она указываетъ вѣрный путь для изученія тригонометріи и простую схему для распредѣленія учебнаго матеріала.

2. Быть можетъ, нигдѣ въ наукѣ такъ рѣзко не проведено различіе между теоріей и прикладной частью, какъ это имѣетъ мѣсто въ данной отрасли

знанія. Задолго до всякой обобщающей теоріи былъ созданъ механизмъ вычисленій; когда же появилась теорія, то разработка ея пошла совершенно независимымъ путемъ, не вліяя на уже создавшуюся часть. Я рѣшилъ поэтому разсмотрѣть развитіе обѣихъ вѣтвей отдѣльно.

### А. Прямолинейная тригонометрія.

**Халдея и Египетъ.** 3. Немногія отрывочныя свѣдѣнія, пока появившія въ наши руки, не даютъ намъ возможности опредѣленно высказаться, какъ далеко ушли халдеи и египтяне въ установленіи основъ тригонометріи. Несомнѣнно, что оба народа пользовались *косинусомъ*: Египтяне дали ему даже особое названіе— «*seqt*». Но были-ли составлены таблицы послѣдовательныхъ значеній косинуса? Вопросъ остается открытымъ.

**Греція до Гиппарха.** 4. Извѣстно, что основныя астрономическія наблюденія были произведены халдеями. Имъ принадлежитъ установленіе календаря, солнечнаго и луннаго цикловъ, способъ вычисленія затменій; они же собрали массу матеріала, послужившаго для дальнѣйшихъ работъ Египтянъ и Грековъ. Со времени Фалеса (624—548) творческая мысль Грековъ проснулась и стала усиленно работать. Астрономическія изысканія сдѣлались занятіемъ цѣлыхъ школъ, какъ наприкладъ Пифагорейской. Въ 433 г. до Р. Х. Метонъ создаетъ свой циклъ, Филолай ок. 400 г. связываетъ впервые въ одно цѣлое пифагорейскія ученія о мірозданіи, а Аристархъ Самосскій въ 280 г. даетъ уже стройную систему, въ послѣдствіи воскрешенную Ко-

перникомъ (1473—1543) и носящую незаслуженно имя лишь послѣдняго. Въ то же время Эратосеенъ, ок. 220 г., производитъ свое знаменитое градусное измѣреніе и вычисляетъ размѣры земли.

5. Такимъ образомъ мы видимъ, что одновременно совершалась двойная работа: съ одной стороны, благодаря наблюденіямъ, все больше и больше накаплился матеріалъ; съ другой стороны — появлялись теоріи и попытки практическихъ, опытныхъ вычислений. Необходимо было соединить то и другое вмѣстѣ, обработать имѣющійся матеріалъ фактовъ и привести его въ связь съ теоріей. Эту задачу взялъ на себя Гиппархъ.

6. Этотъ великій ученый, оставившій отпечатокъ своего генія на всѣхъ научныхъ вопросахъ, которыхъ онъ касался, родился въ г. Никее, въ Визиніи. Его дѣятельность относится къ періоду между 160 г. и 125 г. до Р. Х. Онъ работалъ въ своемъ родномъ городѣ, затѣмъ на островѣ Родосѣ, принадлежавшемъ тогда Египетскому государству, и наконецъ въ Александріи. Одно перечисленіе его трудовъ и открытій заняло бы не мало мѣста. Главнѣйшіе изъ нихъ:

- I) тщательный каталогъ, въ которомъ указаны положенія 1022 звѣздъ; по своей точности и древности онъ имѣетъ для науки неоцѣнимое значеніе;
- II) открытіе явленія *прецессіи*, т. е. предваренія равноденствія (140 г. до Р. Х.);
- III) эксцентрическая теорія земли, первая по времени и математически обоснованная; она явилась базисомъ для позднѣйшихъ законовъ Кеплера (1571—1630);

- IV) теорія сонечнаго и луннаго движеній;
- V) опредѣленіе положенія мѣста на земной поверхности при помощи широты и долготы;
- VI) методъ стереографической проэкціи для черченія картъ;
- VII) составленіе таблицы хордъ, т. е. начала тригонометріи.

Оцѣнку трудовъ Гиппарха даетъ Делямбръ въ слѣдующихъ выразительныхъ словахъ: «Если собрать все, что онъ открылъ и улучшилъ, о чемъ можно судить по числу его работъ и количеству предполагаемыхъ въ нихъ вычисленій, то мы найдемъ въ Гиппархѣ одного изъ самыхъ замѣчательныхъ людей древности и величайшаго изъ всѣхъ въ наукахъ, не являющихся чисто умозрительными».

7. Вернемся теперь къ его работамъ по Тригонометріи. Можно удивляться тому обстоятельству, что постоянныя вычисленія элементовъ треугольника, столь неизбѣжныя при рѣшеніи астрономическихъ вопросовъ (уголъ зрѣнія, углы отклоненій, разстоянія между свѣтилами и землею и т. п.), еще гораздо раньше не привели Грековъ къ разработкѣ основъ тригонометріи. Однако этотъ фактъ объясняется весьма просто. Греческая наука была чисто умозрительной; вычисленія въ ней не имѣли мѣста; еще Пифагоръ (а за нимъ и другіе) презрительно называлъ ариометику «занятіемъ торгашей». Поэтому лишь такой человѣкъ практики и врагъ теорій-гипотезъ, какимъ является Гиппархъ, рѣшился примѣнить данныя Геометріи къ созданію новой отрасли вычисленій. Ему мы обязаны знаменитой теоремой, незаслуженно носящей имя Птолемея: «Во всякомъ впи-

санномъ четыреугольникѣ произведеніе діагоналей равно суммѣ произведеній противоположныхъ сторонъ». Основываясь на ней, онъ создалъ свой «Трактатъ о хордахъ дугъ круга», въ 12 книгахъ, въ которомъ впервые приведена таблица хордъ, ея приложенія для рѣшенія треугольниковъ, а также основанія сферической тригонометріи, необходимой для астрономіи и потому развившейся раньше плоской.

8. Другимъ крупнымъ работникомъ на поприщѣ тригонометріи является Геронъ, обыкновенно называемый Александрійскимъ или Старшимъ въ отличіе отъ Герона Константинопольскаго (ок. 900 г. п. Р. X.) или Младшаго, тоже инженера, какъ и его знаменитый однофамилецъ и предшественникъ. Все, что намъ извѣстно о жизни Герона Александрійскаго, это—что онъ работалъ въ Александріи раньше 120 г. до Р. X. Помимо цѣнныхъ практическихъ и теоретическихъ трудовъ по механикѣ и землемѣрію Геронъ далъ много новаго по плоской тригонометріи, едва намѣченной у Гиппарха. Ему принадлежатъ слѣдующія формулы:

$$1) \quad \frac{ab}{h_c} = \frac{ac}{h_b} = \frac{bc}{h_a} = 2R,$$

$$2) \quad F = p \cdot r,$$

$$3) \quad F = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

изъ двухъ послѣднихъ сейчасъ же выводятся и формулы периметровъ, столь важныя при рѣшеніи треугольника по тремъ сторонамъ.

Герону принадлежитъ также описаніе теодолита, имъ улучшеннаго и приспособленнаго къ геодезиче-

скимъ работамъ; нельзя также пройти молчаніемъ его паровую машину, еще въ началѣ XIX столѣтія бывшую въ ходу въ Шотландіи, пока ее не вытѣснила машина Уатта.

**Клавдій Птоломей (87—165 п. Р. Х.).** 9. Трудъ Гиппарха, какъ и все почти имъ написанное, непосредственно для насъ не сохранился. Его сочиненія большей частью вошли въ знаменитый «Μεγάλη σύνταξις» Клавдія Птолемея, переименованный впоследствии Арабами въ «Альмагестъ». Значеніе труда Птолемея, что касается тригонометріи, достаточно выясняется во II-ой главѣ II-ой части настоящей книги. Здѣсь я ограничусь лишь указаніемъ, что въ Альмагестѣ находятся прочныя начала прямолинейной Тригонометріи.

**Происхожденіе названія.** 10. Названіе «Тригонометрія» происходитъ отъ двухъ греческихъ словъ: «τρίγωνον» — треугольникъ и «μετρέιν» — мѣрить, такъ что дословно значитъ «наука объ измѣреніи треугольниковъ». — Это названіе не совсѣмъ точно, такъ какъ въ тригонометріи дѣло идетъ не объ измѣреніи, а о *вычисленіи* *треугольниковъ*. Тригонометрія дѣлится на Прямолинейную и Сферическую. Первая занимается изученіемъ и вычисленіемъ плоскихъ треугольниковъ; вторая — сферическихъ, т.-е. треугольниковъ, образующихся на поверхности сферы («σφαῖρα» — шаръ) при взаимномъ пересѣченіи трехъ большихъ круговъ, напр. двухъ меридіановъ и экватора на небесной сферѣ или на земномъ глобусѣ.

11. Презирая вычисленія, Греки не позаботились дать новой отрасли знанія особое названіе. Даже Гиппархъ и Геронъ смотрѣли на нее, какъ на часть астрономіи и то часть вычислительную. Большинство

сочиненій, посвященныхъ по существу тригонометріи, озаглавлено иначе; таковы напр. «Трактатъ о хордахъ» Гиппарха, «Сфайрика» Менелая и др. Въ остальныхъ она помѣщена въ отдѣлѣ Астрономіи. То же самое наблюдается у Арабовъ и западно-европейцевъ до XIV—XV ст. Впервые самое слово встрѣчается въ заглавіи книги Питискуса, вышедшей въ Гейдельбергѣ въ 1595 году: «Trigonometria sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus». Съ этого времени оно и вошло во всеобщее употребленіе.

12. Судьбы математики тѣсно связаны съ Александріа, судьбами Греціи и христіанства. Послѣ паденія Римъ и Византія. Греческой государственности при Филиппѣ и Александрѣ наука переселяется въ Александрію, гдѣ просвѣщенная династія Птолемеевъ создала для нея великолѣпныя условія. Здѣсь возникла первая по времени и величію Александрійская Академія, представителями которой являлись Эвклидъ, Эратосѣенъ, Аполлоній, Гиппархъ, Геронъ, Архимедъ, Аристархъ и др. При академіи открывается музей и библіотека, содержавшая до 700,000 свертковъ рукописей; многія изъ нихъ являлись единственными. Сюда стекались ученые со всѣхъ уголковъ земного шара, такъ какъ «владыки міра» — Римляне — менѣе всего вниманія удѣляли наукѣ. Съ потерей Египтомъ независимости наступаетъ упадокъ дѣятельности академіи; она еще разъ успѣваетъ заблестать при Клавдіи Птолемеѣ, но съ воцареніемъ христіанскаго міросозерцанія падаетъ окончательно. Положеніе самой науки рѣзко мѣняется; школы и ученые подвергаются преслѣдованіямъ; толпы фанатиковъ разрушаютъ храмы, сжи-

гаютъ школы, музеи и библіотеки, убиваютъ послѣднихъ представителей знанія. Такъ въ 392 году п. Р. Х. происходитъ осада и разрушеніе храма Озири-Гапи, избіеніе укрывшихся туда защитниковъ и безжалостное преданіе огню находившейся при храмѣ знаменитой библіотеки съ ея вѣками накопившимися сокровищами; въ огнѣ погибли труды многихъ столѣтій, для насъ же сохранились лишь ихъ названія. Въ 415 году подобная же толпа разрушаетъ послѣднюю александрійскую школу и буквально растерзываетъ на улицѣ ея руководительницу, извѣстную ученую Гипатію. Пережившіе погромъ ученики ея бѣгутъ въ Аѳины; но и Аѳинская школа закрывается въ 529 г. императорскимъ декретомъ, воспрещающимъ «языческое обученіе». Вышедшій же въ августѣ того же года Кодексъ Юстиніана содержитъ, среди прочихъ, законъ озаглавленный: «*De maleficiis, mathematicis et caeteris similibus*» (о злоумышленникахъ, математикахъ и тому подобныхъ); въ немъ находится слѣдующій пунктъ: «*Ars autem mathematica damnabilis interdicta est omnino*» — (само же достойное осужденія искусство математики воспрещается совершенно).

Арабы.

13. При такомъ отношеніи къ наукѣ слѣдуетъ удивляться не тому, что на 1000 съ лишнимъ лѣтъ въ Европѣ воцарился мракъ и невѣжество, а скорѣе другому: какимъ образомъ уцѣлѣли жалкіе остатки греческой науки? Этимъ мы всецѣло обязаны одному изъ просвѣщеннѣйшихъ народовъ вообще, арабамъ, тѣмъ самымъ арабамъ, которыхъ позднѣйшіе христіанскіе писатели такъ жестоко несправедливо обвинили въ уничтоженіи александрійской библіотеки.

*Арабы сохранили для Европы древнюю культуру*—и въ этомъ ихъ неизмѣримая заслуга передъ человѣчествомъ. Лишь только основались первые калифаты, какъ ихъ повелители принимаются за народное образованіе. Съ половины VIII столѣтія Багдадъ, благодаря своему географическому положенію, становится центромъ культуры. Всѣ гонимые изъ Египта, Греціи, Рима и Малой Азіи давно уже скитались по свѣту, среди «варваровъ», унося съ собою драгоценные манускрипты великихъ учителей древности; среди нихъ особенно выдѣляются несториане, бѣжавшіе въ V вѣкѣ изъ Сиріи отъ беспощадныхъ преслѣдованій Византіи въ Персію и Месопотамію; они-то собираются затѣмъ, по приглашенію калифовъ, въ арабскихъ владѣніяхъ. Съ другой стороны Багдадъ вступаетъ въ сношенія съ Индіей, гдѣ наука развивалась самостоятельно и въ другомъ, чѣмъ у Грековъ, направленіи. Прежде чѣмъ разсмотрѣть результаты сліянія греческихъ и индусскихъ трудовъ, я остановлюсь на самостоятельныхъ пріобрѣтеніяхъ Индусовъ въ тригонометріи.

14. Замѣчателенъ фактъ, что съ паденіемъ культуры на югѣ и западѣ (Египетъ и Греція) она переносится на Востокъ. Въ V ст. творческая работа въ Европѣ угасла, но уже въ VII ст. мы находимъ въ Индіи такого крупнаго математика, какъ Брамагупта (род. 598 г., ум. ок. 660 г.), оставившаго труды по ариметикѣ, алгебрѣ, геометріи, тригонометріи, астрономіи, съ множествомъ новшествъ, неизвѣстныхъ Грекамъ. Созидательная работа индусовъ падаетъ какъ разъ на періодъ отъ III-го до XII-го ст. н. Р. Х.: она начинается введеніемъ десятичной нумераціи съ Индусы.

нулемъ и кончается работами Баскары - Акаріи (1141—1225).

15. Характеръ изслѣдованій Индусовъ въ математикѣ рѣзко отличается отъ греческаго. Мелкій, разсчетливый и опутанный софизмами умъ грека вѣчно боялся ловушки, вѣчно искалъ подробнѣйшихъ разъясненій и не довѣрялъ чувствамъ; отсюда произошло то исключительное увлеченіе разсужденіемъ, логическимъ построеніемъ доказательства, которое у Эвклида дошло до апогея. Этимъ объясняется и предложеніе передъ теоріей, и презрительное отношеніе къ практикѣ; такъ Архимедъ, творецъ столькихъ механизмовъ, обезсмертившихъ его имя при осадѣ Сиракузъ, смотрѣлъ на нихъ какъ на игрушки, годные лишь занять досугъ, но ничего не значація въ сравненіи съ теоретическими изысканіями; поэтому онъ лично не оставилъ ни одного описанія своихъ многочисленныхъ изобрѣтеній.

Совершенно иной складъ ума проявился у Индусовъ. Роскошная тропическая природа съ ея богатствомъ формъ пробуждала чувства, разжигала фантазію, манила на просторъ; мы видимъ у Индусовъ полнѣйшее отсутствіе чисто логическихъ построеній и широкой вычислительный размахъ. Доказуемость замѣнена интуиціей. Тамъ, гдѣ Грекъ исписывалъ страницы сухихъ отвлеченныхъ разсужденій, Индусъ помѣщалъ чертежъ и вмѣсто всѣхъ доказательствъ подписывалъ единственное слово «смотри!» Одинъ изъ такихъ примѣровъ приведенъ ниже.

Происхожденіе слова „синусъ“ 16. Гиппархъ и Птоломей за мѣру угла принимали хорду; Индусскіе математики впервые ввели въ употребленіе половину хорды и вычислили для нея

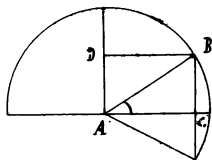
таблицы. Эта полухорда по санскритски называлась «ardhagīva» (половина тетивы лука), такъ какъ сегментъ дѣйствительно напоминаетъ лукъ. Отсюда-то и произошло странное на первый взглядъ латинское названіе «синусъ». Оказывается, что арабскіе переводчики слово «gīva» передѣляли въ «gība»; но въ арабскомъ языкѣ гласныя не пишутся, поэтому слово «gb» можно принять за чисто арабское «gaīb» (джайбъ, впадина, пазуха). Это какъ разъ и случилось съ Платономъ Тибуртинскимъ (Plato von Tivoli aut Tiburtinus), переводчикомъ трактата Аль-Баттани «Liber de motu stellarum» (переводъ выполненъ между 1120—1136 г.г.): встрѣтивъ въ арабскомъ оригиналѣ слово «gb», онъ перевелъ его буквально на латинскій словецъ «sinus» (впадина, заливъ).

17. Индусы ввели въ употребленіе также и синусъ дополнительнаго угла, который впослѣдствіи называли *косинусомъ* («sinus complementi» — синусъ дополненія, въ XVII ст. сократился въ «sinus co.», а затѣмъ въ «cosinus»). Они установили зависимость между синусомъ и косинусомъ взаимно-дополнительныхъ угловъ, т. е. формулу

$$I) \quad \sin A = \cos (90^\circ - A),$$

а также знаменитое уравненіе синуса и косинуса, основное въ курсѣ тригонометріи

$$II) \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$



Смотри!

На чертежѣ приведено индусское доказательство обѣихъ теоремъ съ ихъ характернымъ «смотри!»

**Багдадскій  
періодъ.**

18. Уже при калифѣ Аль-Мансурѣ индусскія астрономическія и математическія сочиненія переводятся на арабскій (772 г.); Гарунъ-аль-Рашидъ (785—809) въ началѣ 800-хъ годовъ поручаетъ сирійскимъ выходцамъ переводъ съ греческаго твореній Гиппократъ, Галена, Аристотеля, Эвклида, а его сынъ и преемникъ Аль-Мамунъ (813—833) устраиваетъ самостоятельное учрежденіе для перевода древнихъ манускриптовъ: Арабы знакомятся съ трудами Аполлонія, Архимеда, Птолемея, Гипсикла и ихъ послѣдователей и комментаторовъ. Характеренъ тотъ фактъ, что сами манускрипты Аль-Мамунъ получилъ изъ Константинополя при заключеніи договора съ византійскимъ императоромъ Михайломъ III, при чемъ пунктъ о выдачѣ возможно бѣльшаго числа сочиненій составлялъ главное условіе мира. При Аль-Мамунѣ же Мохамедъ-ибн-Муза-аль-Хваризми (820 г.) пишетъ свой знаменитый трактатъ по алгебрѣ, гдѣ соединены вычисленія Индусовъ съ геометріей Грековъ, а въ 829 г. подъ руководствомъ двухъ астрономовъ, Халида-ибн-Абдоль-Малика и Алиса-ибн-Исы, производится на равнинѣ Сингіаръ въ Месопотаміи первое точное (послѣ Эратосѣена и Посейдонія) градусное измѣреніе, отличающееся уже мало отъ современнаго.

Наконецъ при томъ же калифѣ насчитывается цѣлый рядъ высшихъ школъ въ городахъ: Багдадѣ, Самаркандѣ, Басрѣ, Каирѣ, Александріи, Кордовѣ.

19. Характеръ математическихъ работъ арабскихъ ученыхъ отличается отъ греческихъ въ существенныхъ чертахъ. Два міросозерцанія, индусское и греческое, столкнулись на нейтральной почвѣ и въ ре-

зультатѣ пришли къ соглашенію; хотя творенія грековъ оказали больше вліянія на творчество пріютившей ихъ страны, но индусы зато пріучили арабовъ къ вычисленіямъ, помогли имъ создать алгебру и разработать тригонометрію. Персидскій принцъ Могамедъ-ибнъ-Геберъ, прославившійся подъ именемъ Аль-Баттани (877—929), помимо многихъ важнѣйшихъ работъ по астрономіи, разработалъ таблицы синусовъ и котангенсовъ, а также другіе вопросы тригонометріи; Абуль-Вефа (940—998) вводитъ уже тангенсы, правда подъ видомъ отношенія  $\frac{\sin x}{\cos x}$ , составляетъ для нихъ таблицы и примѣняетъ неравенства для вычисленія  $\sin \frac{1}{2}^\circ$ . Такимъ образомъ главные пріобрѣтенія въ тригонометріи были сдѣланы до XI ст.; но къ сожалѣнію они оставались неизвѣстными Европѣ, пока наконецъ Пурбахъ и Региомонтанусъ не переоткрыли ихъ вновь, 500 лѣтъ спустя.

20. Европа, начиная съ III-го и кончая XII-мъ **Средніе Вѣ-** ст., представляла поучительное, но печальное **на въ Евро-** зрѣлище. Невѣжество укоренилось такъ глубоко, что съ трудомъ находили полу - грамотныхъ людей для занятія должности священника; многіе изъ нихъ едва разбирали по складамъ одинъ какой-нибудь требникъ. О людяхъ, занимающихся научными вопросами, не было и помину; уцѣлѣвшіе манускрипты древнихъ или переходили въ руки «варваровъ-арабовъ» (Багдадъ, Каиръ, Александрія, Кордова и др.), или мирно гнили въ монастырскихъ подвалахъ. Крестовые походы впервые пробудили несчастную Европу. Завязались торговые сношенія съ Азіей и Африкой, начался обмѣнъ мыслей. Оказалось, что культура

арабовъ несравненно выше. Молодежь ринулась въ сосѣднюю Испанію искать въ арабскихъ университетахъ свѣта, знанія и свободы. Особенно много иностранцевъ стекалось въ знаменитую Кордову, бібліотека которой уже въ періодъ 912—976 гг. насчитывала 600,000 книгъ. Духовенство не смогло бороться съ этимъ движеніемъ и принуждено было идти на уступки. Въ добавокъ въ концѣ XII-го и въ началѣ XIII-го ст. пробудившійся религіозный фанатизмъ арабовъ, подъ влияніемъ крестовыхъ походовъ, обрушился въ Кордовскомъ калифатѣ на евреевъ. Послѣдніе эмигрировали изъ Испаніи въ южную Францію и принесли съ собою книги и вѣянія по ту сторону Пиренеевъ. И вотъ около 1200 года основывается рядъ высшихъ школъ въ Парижѣ, Оксфордѣ, Кембриджѣ, Неаполѣ, Салерно, Болоньѣ, Падуѣ, Павіи и др. городахъ христіанской Европы. Императоръ Фридрихъ II—эта крупная личность въ дѣлѣ освобожденія ума—оказываетъ широкое покровительство ученымъ всѣхъ націй и религій; подъ его верховнымъ руководствомъ организуется систематическая коллегія переводчиковъ арабскихъ математическихъ сочиненій: такимъ образомъ, хотя и изъ третьихъ рукъ, но все же наконецъ Европа знакомится съ твореніями Эвклида, Архимеда, Аполлонія, Птолемея и др. Медленно, но вѣрно назрѣваетъ эпоха Ренессанса. Она, правда, замедляется въ XIV ст. благодаря травлѣ, поднятой противъ арабовъ въ Испаніи и реакціи духовенства противъ науки и свободомыслія; но въ половинѣ XV ст. происходятъ два рѣшающихъ событія: это взятіе Константинополя тур-

ками и изобрѣтеніе книгопечатанія. Оба факта свершились въ 1453 году.

21. Бѣгство изъ павшей Византіи многихъ грековъ принесло неисчислимые послѣдствія для науки. Большинство бѣглецовъ направилось въ Италію, гдѣ вскорѣ создалась «Эпоха возрожденія наукъ и искусствъ». У нихъ же учился величайшій математикъ XV столѣтія Іоганнъ Мюллеръ, болѣе извѣстный подъ именемъ Регіомонтануса (1436—1476). Уже его учитель Пурбахъ (1421—1461) составилъ исправленную и улучшенную таблицу синусовъ; Регіомонтанусъ вводитъ тангенсы, составляетъ для нихъ таблицы и разрабатываетъ затѣмъ теорію рѣшенія треугольниковъ. Множество разобранныхъ имъ частныхъ случаевъ представляютъ нерѣдко весьма остроумныя комбинаціи при простомъ и изящномъ рѣшеніи. Послѣ Регіомонтануса теорія треугольника обогатилась уже немногимъ. Его трудъ «*De triangulis omnimodis libri quinque*» написанъ въ 1464 г., но впервые напечатанъ лишь въ 1533 г., въ Нюрнбергѣ.

22. Современникъ Регіомонтануса, смѣлый новаторъ, шедшій дальше Коперника, авторъ знаменитаго опредѣленія «Вселенная есть сфера, центръ которой вездѣ, а окружность нигдѣ», сынъ рыбака, а затѣмъ кардиналъ, Николай Куза (1401—1464) заслуживаетъ хотя бы краткаго упоминанія. Его труды въ области философіи и астрономіи достаточно извѣстны; что же касается тригонометріи, то задача о квадратурѣ круга привела его къ формулѣ

$$R = \frac{r}{n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}},$$

гдѣ  $p$  — полупериметръ правильнаго вписаннаго  $n$ -угольника, а  $R$  — радіусъ круга. Эта формула является обобщеніемъ приѣма Гиппарха и Птолемея и примѣняется во II-й главѣ I-й ч. этой книги въ слегка измѣненномъ видѣ.

„Простаф-  
резисъ“.

23. Практическія задачи, требовавшія примѣненія тригонометріи, выдвинули на очередь вопросъ объ упрощеніи вычисленій. Дѣло въ томъ, что таблицы синусовъ и тангенсовъ, вычисленныя со многими десятичными знаками, напримѣръ съ 11-ю у Рэтикуса или съ 16-ю у Питискуса, приводили къ умноженію и дѣленію многозначныхъ чиселъ, гдѣ ни одной цыфры не смѣли отбросить; при тогдашнихъ приѣмахъ записи это создавало гигантскія вычисленія. Вотъ почему еще Аль-Батани пытался преобразовать формулы такъ, чтобы умноженіе и дѣленіе замѣнить сложеніемъ и вычитаніемъ; таковы, напримѣръ, слѣдующія преобразования

$$\begin{aligned}\sin A \cos B &= \frac{1}{2} \sin (A - B) + \frac{1}{2} \sin (A + B), \\ \sin A \sin B &= \frac{1}{2} \cos (A - B) - \frac{1}{2} \cos (A + B).\end{aligned}$$

Съ возрожденіемъ наукъ въ Европѣ, особенно послѣ Региомонтануса, многіе изъ математиковъ принялись за дальнѣйшую разработку этого метода. Павелъ Виттихъ, Иоостъ Бюрги, Клявіусъ и въ особенности Тихо-Браге (1588) удѣлили много вниманія подобнымъ преобразованіямъ; самъ методъ получилъ характерное названіе «Простафerezисъ», отъ «πρόσθεσις» — сложение и «ἀφαιρεσις» — вычитаніе.

Логарисмы. 24. Между тѣмъ назрѣвало въ тиши и другое знаменитое открытіе, составившее эпоху въ дѣлѣ вычи-

сленій: я имѣю въ виду логариемы. Идея сопоставленія двухъ рядовъ, ариѳметической и геометрической прогрессій, съ цѣлью замѣны умноженія сложениемъ, сложилась еще въ умѣ Архимеда. Ею воспользовался затѣмъ Михаилъ Штифель въ своей «*Arithmetica integra*», вышедшей въ свѣтъ въ 1544 г. въ Нюрембергѣ, съ предисловіемъ Мелянхтона. Наконецъ совершенно независимо и не зная другъ о другѣ создали законченный методъ логариѳмированія два крупныхъ ума: англичанинъ Нэпиръ и швейцарецъ Бюрги.

25. John Napier (Néper), baron von Merchiston, **Нэпиръ.** родился въ Шотландіи, въ 1550 г.; послѣ окончанія колледжа св. Андрея отправился путешествовать по Германіи, Франціи и Италіи; вернувшись въ 1571 г. на родину, онъ въ томъ же году женился и поселился навсегда въ своемъ родномъ замкѣ до смерти, наступившей въ 1617 г. Это былъ большой баринъ, въ полномъ значеніи этого слова; по собственному отзыву, его главное занятіе составляло истолкованіе пророчествъ, и онъ написалъ объ этомъ нѣсколько сочиненій, встрѣченныхъ современниками гораздо лучше его работъ по математикѣ; во время отдыха онъ занимался математикой, особенно тригонометріей. Еще ок. 1594 г. онъ сообщилъ часть своихъ изслѣдованій знаменитому Тихо-Браге; затѣмъ въ 1614 г. появилась его таблица логариѳмовъ тригонометрическихъ величинъ: «*Mirifici logarithmorum canonis descriptio.—Edinburgi. 1614*». Благодаря настоятельной потребности въ упрощеніи вычисленій, таблицы Нэпира, особенно послѣ переработки ихъ въ 1617 г. профессоромъ Бриггсомъ въ десятичные, въ какихъ

нибудь 2—3 года распространились по всей Европѣ и завоевали себѣ прочное положеніе.

**Бюрги.**

26. Въ это время въ Прагѣ подобными же таблицами пользовался астрономъ и механикъ Joost Bürgi (Bürgi), род. въ Лихтенштейнѣ, въ Швейцаріи, въ 1552 г. Самоучка и бѣднякъ, онъ упорно пробивалъ себѣ дорогу въ жизни, но его скромность отодвигала его всегда на второй планъ. Выдвинувшись какъ ловкій часовщикъ, онъ получаетъ соотвѣтственное занятіе въ 1579 г. при дворѣ ляндграфа гессенскаго, Вильгельма IV, и какъ надворный часовщикъ и механикъ остается въ Касселѣ до 1604 г. Императоръ Рудольфъ II приглашаетъ его въ Прагу, куда онъ переѣхалъ 15 апрѣля. Здѣсь онъ засталъ Кеплера, съ которымъ вскорѣ сблизился и сталъ совместно работать. Уже въ то время онъ обладалъ методомъ логариѣмированія, что подтверждается, между прочимъ, авторитетомъ Кеплера. Въ 1609 г. за свои математическія заслуги онъ получилъ отъ императора дворянство. Послѣ обнародованія труда Нэпира, понуждаемый своими друзьями, онъ рѣшается опубликовать въ 1620 г. часть своихъ изысканій въ книгѣ «Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen», напечатанной въ Прагѣ. Его таблицы гораздо проще по конструкціи Нэпировыхъ и, кромѣ того, онѣ представляютъ на самомъ дѣлѣ натуральныя таблицы, такъ какъ основаніемъ ихъ служитъ число  $\left(1 + \frac{1}{10^4}\right)^{10^4} = 2,71814593$ , согласно вычисленіямъ Бюрги. А это и есть число «e», служащее въ настоящее время основаніемъ системы натуральныхъ логариѣмовъ;

значеніе « $e$ » дано Бюрги достаточно точно, до четвертой десятичной цыфры ( $e=2,7182718\dots$ ).

Все это, однако, выяснилось лишь въ концѣ XIX-го ст., такъ какъ главная рукопись Бюрги, содержащая объясненіе устройства таблицъ, была найдена лишь въ 1856 г., въ Данцигѣ. При жизни же Бюрги его таблицы не получили вовсе распространенія, такъ какъ счастливая мысль Бриггса обезпечила побѣду Нэпиру. Этому способствовали также Кеплеръ, издавшій свои таблицы въ 1625 г., Кавальери въ 1624 г. въ Италіи и Эдмондъ Вингаты въ 1626 г. во Франціи.

Побѣдѣ логариемовъ неожиданнымъ образомъ способствовалъ и «простаферезисъ». Сначала онъ пріостановился и, казалось, столько лѣтъ и трудовъ потрачены даромъ. Но вскорѣ увидѣли, что тѣ же формулы могутъ служить и для обратной цѣли: для перехода отъ суммы и разности къ произведенію и частному, т. е. къ логариемируемому виду выраженій.

27. О дальнѣйшей разработкѣ собственно Рэтикусъ. тригонометріи приходится сказать немного. Рэтикусъ (1514—1576) вводитъ въ употребленіе секансъ и создаетъ для него таблицы; ему принадлежатъ также формулы периметровъ и формулы для  $\sin 2x$  и  $\sin 3x$ , выраженныхъ въ зависимости отъ  $\sin x$ . Рэтикусъ, кромѣ того, высказался ясно, что тригонометрическія величины могутъ быть разсматриваемы, какъ отношенія сторонъ треугольника; такимъ образомъ для полученія ихъ можно вполне обойтись безъ круга.

Голландскій профессоръ Снэлліусъ (1581—1626) Снэлліусъ. создаетъ методу триангуляціи и при ея помощи измѣряетъ земной меридіанъ. Это былъ одинъ изъ рѣд-

кихъ талантовъ, разившихся крайне рано: къ 12-ти лѣтнему возрасту онъ обладалъ суммой математическихъ познаній своего времени. Снэлліусу принадлежить также установленіе знаменитаго закона рефракціи:  $\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n$ , ошибочно приписаннаго Декарту.

**Питискусъ.** Въ 1610 г. Бартоломей Питискусъ выпустилъ въ свѣтъ новыя тригонометрическія таблицы синусовъ, тангенсовъ и секансовъ, вычисленныхъ черезъ 10" съ 16 десятичными знаками, а для малыхъ угловъ даже съ 26-ю! Этотъ трудъ навсегда останется блестящимъ памятникомъ человѣческаго терпѣнія. Онъ имѣетъ большое значеніе для повѣрки обыкновенныхъ таблицъ.

**Введеніе**  
**триг. терминовъ.** 28. Къ этому времени относится и установленіе названій: secans, tangens, cosecans, cosinus, cotangens. Первые два были введены Томасомъ Финкомъ въ его «Geometriae Rotundi (1583); третье впервые употребилъ Рэтикусъ («Opus Palatinum», 1596); четвертое и пятое — Гюнтеръ въ «Canon Triangulorum», 1620). Лишь въ 1626 г. Жираръ начинаетъ пользоваться сокращеніями sin., tan., sec., и только въ 1657 г. вводитъ Oughtred (Аутридъ) обозначенія cos и cot; но только авторитетъ Эйлера способствовалъ ихъ распространенію съ 1748 г. И здѣсь оказалось нужнымъ цѣлое столѣтіе для того лишь, чтобы упрочить небольшія нововведенія.

Названія «e an» (сѣкущая) и «tangens» (касательная) вытекаютъ непосредственно изъ графической интерпретаціи функций (см. часть II, глава 2).

**Заключеніе.** 29. Оглядывая пройденный путь, мы видимъ ясно главные этапы творчества въ области тригонометріи.

Сначала первые шаги: установление зависимости между углами и сторонами треугольника, введение синуса, составление таблицъ. Проходятъ цѣлыя тысячелѣтья, и наступаетъ вторая эпоха (съ X-го стол. послѣ Р. Х.), эпоха увеличенія точности вычисленій и уменьшенія отдѣльныхъ выкладокъ. Въ эту эпоху появляется тангенсъ и—лѣтъ черезъ 500—секансъ. Наконецъ, въ теченіе XIX стол. выполнена систематичная сводка имѣющагося матеріала и закончена разработка деталей. И теперь, мы—наслѣдники этихъ сокровищъ ума, можемъ сказать съ гордостью:

Дѣло тысячелѣтій кончено!

## В. Теорія гониометрическихъ функцій.

30. Невозможно точно установить, когда совер- Первые тру-  
 шился сознательный переходъ отъ тригонометріи ды.  
 къ гониометріи. Крупные шаги въ этомъ направленіи сдѣланы лишь въ XVII ст. Уже во многихъ трудахъ Виета (1540—1603) встрѣчается представленіе о синусѣ какъ о функціи угла; у него мы находимъ разложеніе  $\sin n\theta$  въ рядъ при помощи  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$ . Около 1673 г. Ньютонъ нашелъ формулы для разложенія въ ряды прямыхъ и обратныхъ круговыхъ функцій. Вслѣдъ затѣмъ Жанъ Бернулли (1667—1748) высказалъ мысль, что тригонометрическія величины могутъ стать предметомъ совершенно независимыхъ аналитическихъ изысканій, а Моавръ (1667—1751), пользуясь теоріей комплексовъ, далъ знаменитую теорему, носящую его имя:

$$(\sin \theta + i \cos \theta)^n = \sin n\theta + i \cos n\theta.$$

Эйлеръ.  
1707—83.

31. Въ 1727 году появилась книга Mayer'a «Arithmetic of lines», посвященная тригонометрии и функциямъ. Она послужила канвой для молодого 20-ти лѣтняго ученика Жана Бернулли, прославившагося больше учителя,—для Леонарда Эйлера. Опубликованный въ 1748 г. бессмертный трудъ «Introductio in analysin infinitorum» содержитъ въ первой части новую теорію гониометрическихъ функций, гдѣ всѣ ихъ свойства изучены аналитически, при помощи рядовъ. Великій умъ Эйлера открылъ—неожиданно для всѣхъ—тѣсную и поразительную связь между гониометрическими, показательными и логарифмическими функциями. Первыхъ два вида связаны уравненіемъ Эйлера

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta},$$

которое распадается на два

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2},$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Второе уравненіе при  $\theta = \frac{\pi}{2} + ai$  даетъ для синуса значеніе

$$\sin \theta = \frac{e^a + e^{-a}}{2},$$

т. е. синусъ мнимаго угла можетъ имѣть вещественныя положительныя значенія, превышающія 1.

Обратныя круговыя функции связаны съ логарифмическою функцией уравненіемъ

$$\operatorname{arctg} \theta = \frac{1}{2i} \lg \frac{1+i\theta}{1-i\theta}.$$

Благодаря этимъ открытыямъ установлено, что функція  $e^{\theta}$  тоже періодична; ея періодъ  $2\pi i$ .

32. Эйлеръ открылъ новые горизонты. Одно- временно съ нимъ Lambert (1728—1777) созда- Новыя функ-  
ціи.  
етъ теорію мнимыхъ угловъ, вычисляетъ для нихъ таблицы и въ 1768 г. выпускаетъ въ свѣтъ «Гиперболическую тригонометрію», гдѣ формула Моавра примѣнена къ гиперболическимъ функціямъ. Великій Lagrange (1736—1813) улучшаетъ и расширяетъ методы Эйлера. Legendre (1752—1833) въ «Traité des fonctions elliptiques» собралъ результаты 40-лѣтнихъ изысканій, создавъ новую вѣтвь анализа, основанную все на тѣхъ же гониометрическихъ функціяхъ; за нѣсколько недѣль до смерти онъ издаетъ добавочный третій томъ, содержащій резюмэ работъ болѣе счастливыхъ его наслѣдниковъ въ области эллиптическихъ функцій, Абеля и Якоби. Два послѣдніе, вмѣстѣ съ Гауссомъ, открыли двойную періодичность новыхъ функцій, вещественную и мнимую, дали рядъ общихъ теоремъ и указали, что гониометрическія функцій являются зародышемъ большинства трансцендентныхъ функцій.

33. Одновременно съ упомянутыми открытыями Фурье,  
1768—1830.  
появились открытыя и въ другомъ направленіи. Еще Даниилу Бернулли (1700—1782), второму изъ сыновей Жана, пришла счастливая идея рѣшать дифференціальныя уравненія при помощи гониометрическихъ рядовъ. Французскій физикъ Фурье пошелъ гораздо дальше. Въ его «Théorie analytique de la chaleur» (1822) находится знаменитая теорема, гласящая, что всякая вещественная функція можетъ быть разложена въ рядъ, члены котораго суть синусы и косинусы

угла, измѣняющагося въ предѣлахъ отъ 0 до  $2\pi$ . Такимъ образомъ Фурье далъ заключительное звено въ длинной цѣпи приложений гониометрическихъ функцій; отнынѣ можно сказать съ увѣренностью, что нѣтъ вопроса анализа, физики, механики, астрономіи и т. п., съ которымъ бы эти функціи не были такъ или иначе связаны.

**Заключеніе.** 34. Такова роль и значеніе гониометрическихъ функцій. Правда, тогда какъ тригонометрія представляетъ законченную картину, теорія гониометрическихъ функцій все еще развивается. Здѣсь все лишь начато... набросано... намѣчено... Отдѣльные штрихи— на громадномъ фонѣ. Но эти штрихи таковы, что— хотя и пройдутъ столѣтья— все-таки можно въ pendant къ предыдущему съ гордостью заявить:

Дѣло столѣтій начато!

---

# ЧАСТЬ ПЕРВАЯ



# Оффіціальныя программы 26-го и 30-го Іюня 1906 г.

## ТРИГОНОМЕТРІЯ.

### 6-й классъ (Реальн. учил.).

Понятіе о тригонометрическихъ величинахъ: синусъ, косинусъ, тангенсъ и котангенсъ острого и тупого угла. Значенія, которыя способны принимать каждая изъ тригонометрическихъ величинъ. Соотношенія между тригонометрическими величинами двухъ дополнительныхъ и двухъ дополнительныхъ угловъ.

Логарифмы тригонометрическихъ величинъ. Устройство тригонометрическихъ таблицъ.

Соотношенія между элементами прямоугольнаго треугольника. Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ.

Пропорціональность стороны треугольника синусу противолежащаго угла. Выраженіе тангенса половины угла треугольника въ его сторонахъ. Отношеніе разности сторонъ треугольника къ ихъ суммѣ. Рѣшеніе косоугольныхъ треугольниковъ. Вычисленіе площадей треугольниковъ. Приложеніе рѣшенія треугольниковъ къ рѣшенію геометрическихъ задачъ на вычисленіе.

### 7-ой классъ (Реальн. учил.).

Тригонометрическія (круговыя) функціи дуги. Измѣненіе значеній тригонометрическихъ функцій при

измѣненіи дуги (аргумента) отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ . Формулы приведенія тригонометрическихъ функцій какой ни есть дуги къ тригонометрическимъ функціямъ дуги, заключенной между 0 и  $\frac{\pi}{4}$ .

Соотношенія между тригонометрическими функціями одной и той же дуги.

Теорема сложенія (тригонометрическія функціи суммы и разности дугъ). Тригонометрическія функціи кратной дуги и половины дуги.

Представленіе суммы и разности синусовъ и косинусовъ въ видѣ произведеній. Понятіе объ обратныхъ круговыхъ функціяхъ.

Тригонометрическія уравненія.

Неравенства:  $\sin x < x < \operatorname{tg} x$  и  $0 < x - \sin x < \frac{x^3}{4}$

для дугъ, заключенныхъ между 0 и  $\frac{\pi}{2}$ , и вытекающая изъ этихъ неравенствъ возможность приближенного вычисленія тригонометрическихъ функцій.

---

## ВВЕДЕНИЕ.

### I. Отсутствие пропорциональности между сторонами и углами треугольника.

1. Вопросы элементарной геометріи, въ громад-номъ большинствѣ случаевъ, рѣшаются путемъ построения, при помощи циркуля и линейки, и только лишь нѣкоторыя изъ задачъ рѣшаются вычисленіемъ. Причину такого явленія я разсмотрю подробнѣе.

2. Всякій геометрический вопросъ можно свести къ вопросу о рѣшеніи одного или нѣсколькихъ треугольниковъ, какъ простѣйшихъ изъ фигуръ и наиболѣе детально изученныхъ. Такъ, напр., многоугольникъ при помощи извѣстнаго числа діагоналей разбивается на треугольники; объемы многихъ тѣлъ вычисляются при помощи ихъ основаній или сѣченій, а послѣднія, въ свою очередь, представляютъ собою тѣ или иныя фигуры и т. п. Слѣдовательно, рѣшеніе треугольниковъ должно быть положено въ основу рѣшенія геометрическихъ вопросовъ.

3. Извѣстно, что въ треугольникѣ различаютъ 6 основныхъ элементовъ: три угла и три стороны, причемъ для опредѣленія размѣровъ и формы треугольника достаточно заданія любыхъ трехъ элементовъ его, лишь бы только въ ихъ число входила хоть

одна изъ сторонъ. Если же будутъ даны только три угла, то такому заданію, какъ извѣстно, соотвѣтствуетъ безчисленное множество подобныхъ треугольниковъ. Между тѣмъ планиметрия никогда не даетъ опредѣленной зависимости между числомъ градусовъ угла и длиною противолежащей стороны, т. е. такой зависимости, которую можно было бы выразить въ числахъ. Для этого вспомнимъ теоремы:

а) Во всякомъ треугольникѣ противъ большей стороны лежитъ и большій уголъ, и обратно.

б) Если двѣ стороны одного треугольника соотвѣтственно равны двумъ сторонамъ другого треугольника, то противъ большаго изъ угловъ, заключенныхъ между ними, лежитъ большая сторона, и обратно.

Мы видимъ, что эти теоремы даютъ лишь *неопредѣленные* соотношенія, поэтому вычисленіе сторонъ при помощи угловъ и угловъ при помощи сторонъ недоступно планиметріи; это и повліяло на выборъ метода рѣшеній геометрическихъ вопросовъ: предпочтеніе было отдано методу построенія.

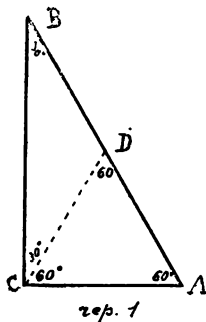
4. Главнымъ препятствіемъ для установленія простой и опредѣленной зависимости между углами и сторонами треугольника является *отсутствіе пропорциональности между ними*. Въ этомъ можно убѣдиться, рассмотрѣвъ слѣдующіе два случая.

I. Возьмемъ прямоугольный треугольникъ  $ABC$  (чер. 1), въ которомъ  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ ; соединимъ вершину  $C$  прямого угла съ точкой  $D$ , серединою гипотенузы. Въ точкѣ  $D$  лежитъ центръ круга, описаннаго около  $\triangle ABC$  (уголъ  $C$  прямой, вписанный, опирается на діаметръ). Поэтому  $DA = DC = DB$ , какъ радіусы одного и того же круга. Далѣе,  $\triangle ACD$

имѣетъ два угла по  $60^\circ$ , слѣдовательно, третій уголъ  $ACD$  тоже равенъ  $60^\circ$ , и  $\triangle ACD$  равносторонній. Отсюда слѣдуетъ, что  $AC = AD$  или

$$1) AC = \frac{AB}{2},$$

т. е. катетъ, лежащій противъ угла въ  $30^\circ$ , равенъ половинѣ гипотенузы.



Для другого катета по теоремѣ Пифагора находимъ

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = AB^2 - \frac{AB^2}{4} = \frac{3}{4} AB^2;$$

отсюда

$$2) BC = \frac{AB}{2} \sqrt{3}.$$

Углы этого треугольника равны  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $90^\circ$ ; имѣемъ

$$3) 30^\circ : 60^\circ : 90^\circ = 1 : 2 : 3.$$

Подобнымъ же образомъ составимъ отношеніе противоположащихъ даннымъ угламъ сторонъ:

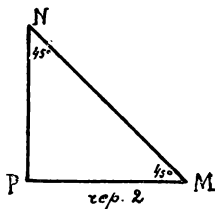
$$AC : BC : AB = \frac{AB}{2} : \frac{AB}{2} \sqrt{3} : AB.$$

Сокращая на  $AB$  и помножая на 2, получимъ

$$4) AC : BC : AB = 1 : \sqrt{3} : 2.$$

Эти два равенства (3-ье и 4-ое) показываютъ, что углы даннаго треугольника не пропорціональны про-

тиволлежащимъ сторонамъ и что стороны растутъ *медленнѣе*: въ то время, какъ уголъ увеличился втрое, соотвѣтствующая сторона увеличилась всего вдвое.



II. Рассмотримъ теперь равнобедренный прямоугольный треугольникъ  $MNP$  (чер. 2). Такъ какъ  $PM = PN$ , то по теоремѣ Пифагора имѣемъ

$$5) \quad MN = PM \sqrt{2}.$$

Подобно предыдущему находимъ

$$6) \quad 45^\circ : 90^\circ = 1 : 2.$$

Далѣе

$$PM : MN = PM : PM \sqrt{2}$$

или

$$7) \quad PM : MN = 1 : \sqrt{2}.$$

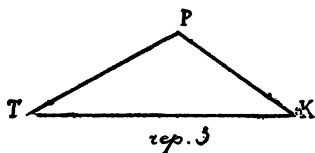
Мы видимъ, что и въ этомъ случаѣ стороны *не пропорціональны* угламъ и растутъ *медленнѣе* угловъ ( $\sqrt{2} = 1,41$  прибл.).

5. Совокупность полученныхъ результатовъ показываетъ достаточно ясно, что стороны измѣняются вообще не пропорціонально угламъ. Если же обратить вниманіе еще на то, что угламъ въ  $60^\circ$  и  $30^\circ$ , *отношеніе коихъ 2*, соотвѣтствуютъ стороны съ отношеніемъ, равнымъ  $\sqrt{3}$ , а угламъ въ  $90^\circ$  и  $45^\circ$ , *отношеніе коихъ тоже 2*, соотвѣтствуютъ стороны съ отношеніемъ, равнымъ  $\sqrt{2}$ ; то предположеніе о пропорціональности надо считать устраненнымъ окончательно.

## II. Графическій способ рѣшенія треугольника.

6. Для рѣшенія треугольника въ числахъ геометрія даетъ слѣдующій способъ. Возьмемъ одинъ изъ треугольниковъ, полученныхъ В. Струве при его градусномъ измѣреніи по Ляпландіи между тремя пунктами:  $T$  (Торнео),  $K$  (Какавамара) и  $P$  (Перравара), причемъ данными служили  $TK = 16343,91$  саж.,  $\angle T = 29^\circ 54' 30'',69$  и  $\angle K = 39^\circ 20' 33'',82$  (чер. 3).

Чтобы начертить треугольникъ, подобный данному, приходится пользоваться масштабомъ, транспортиромъ, циркулемъ и линейкой. Вообще стороны



треугольниковъ, съ которыми чаще всего приходится имѣть дѣло на практикѣ, напр. при геодезическихъ работахъ, топографическихъ съемкахъ, межеваніи земель и т. п., обыкновенно выражаются въ десяткахъ и сотняхъ верстъ.

Пусть 1 дюймъ масштаба представляетъ собою 1000 саж., тогда сторона  $TK$  представится на чертежѣ прямою въ 16,34 д. Далѣе, построивъ при точкахъ  $T$  и  $K$  углы въ  $29^\circ 50'$  и  $39^\circ 20'$ , мы найдемъ третью вершину  $P$  треугольника. Теперь при помощи масштаба измѣримъ, напр., сторону  $PK$ ; она окажется равною 8,76 д., что даетъ въ дѣйствительности  $1000 \text{ с.} \times 8,76 = 8760$  саж. Итакъ, треугольникъ рѣшенъ при помощи графическаго метода просто и легко; остается опредѣлить величину ошибокъ, допущенныхъ при рѣшеніи.

7. Сторона  $TK$  (по масштабу) составляет [6,34391 д., но мы должны были ограничиться двумя десятичными знаками, такъ какъ уже 0,01 д. съ трудомъ различается на масштабѣ; *это первая ошибка*, довольно большая, такъ какъ отброшенная величина 0,00391 д. составляетъ на самомъ дѣлѣ 3,91 саж. Далѣе, ребро линейки всегда болѣе или менѣе искривлено, и проводимыя при ея помощи прямыя  $TK$ ,  $TP$  и  $KP$  всегда нѣсколько уклоняются отъ своего истиннаго направленія; *это вторая ошибка*. При помощи наилучшаго транспорта мы не въ состояніи построить уголъ даже съ точностью до 0,1 градуса; вотъ почему пришлось ограничиться построеніемъ въ нашемъ треугольникѣ угловъ  $T = 29^\circ 50' = 29^\circ \frac{5}{6}$  и  $K = 39^\circ 20' = 39^\circ \frac{1}{3}$ , что даетъ ошибку въ  $4' 30''$ , 69 для перваго угла и въ  $33'', 82$  для втораго угла; *это третья ошибка*. Кромѣ того, точность черченія есть явленіе субъективное, зависящее отъ глаза и навыка даннаго лица; при этомъ каждый дѣлаетъ пзвѣстную, ему только одному свойственную ошибку; *это четвертая ошибка*. Наконецъ, неточность циркуля и толщина, хотя бы и минимальная, проводимыхъ дугъ и прямыхъ линій приводитъ къ новымъ невѣрностямъ въ рѣшеніи; *это пятая ошибка*.

Резюмируя все сказанное мы должны заключить, что полученная величина стороны  $PK$  значительно отличается отъ истинной; и дѣйствительно, истинное значеніе 8714,6 саж., что даетъ ошибку въ 45,4 саж. Подобную же ошибку мы найдемъ и при вычисленіи стороны  $TP$  (см. стр. 55, примѣръ  $\Gamma$ ).

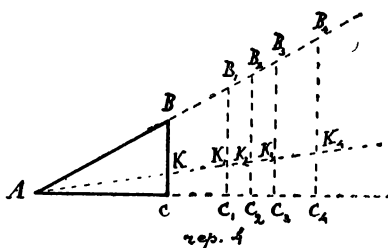
8. Итакъ, графическій методъ рѣшенія треуголь-

никовъ неудобень и неточень; неудобень, такъ какъ приходится, въ виду постояннаго масштаба, чертить часто крупные или очень мелкіе треугольники; неточень, такъ какъ неточны сами инструменты, а также приемы черченія. Наконецъ, онъ не удовлетворяетъ главному требованію вычисленій, требованію указать степень точности или степень приближенія рѣшенія, такъ какъ ошибки инструментовъ и ошибки личные не поддаются опредѣленному учету. Въ виду этого приходится прибѣгнуть къ другому методу—къ вычисленію элементовъ треугольника, однихъ при помощи другихъ; это вычисленіе проще и изящнѣе построенія, а главное—основано на общемъ приѣмѣ и даетъ результаты съ указанной заранѣе степенью точности. Оно и составляетъ предметъ тригонометріи.

---

## Глава I. Синусъ и косинусъ.

1. Происхождение синуса и косинуса. — Возьмемъ прямоугольный треугольникъ  $ABC$  (чер. 4). Продол-



жая стороны  $AB$  и  $AC$  и опуская изъ произвольно выбранныхъ (на сторонѣ  $AB$ ) точекъ  $B_1, B_2, B_3, B_4, \dots$  перпендикуляры  $B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, B_4C_4, \dots$  на

продолженіе стороны  $AC$ , получимъ рядъ подобныхъ треугольниковъ съ общимъ острымъ угломъ  $A$ . Изъ подобія этихъ треугольниковъ слѣдуетъ

$$1) \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_3C_3}{AB_3} = \frac{B_4C_4}{AB_4} = \dots = \text{Const.}$$

$$2) \frac{AC}{AB} = \frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC_2}{AB_2} = \frac{AC_3}{AB_3} = \frac{AC_4}{AB_4} = \dots = \text{Const.}$$

Мы получили два ряда отношеній, соотвѣтственно равныхъ между собою; такъ какъ эти ряды можно продолжить сколь угодно далеко, то очевидно, что каждое изъ отношеній, какъ первыхъ, такъ и вторыхъ, есть величина постоянная; это обозначаютъ сокращено черезъ  $\text{Const.}$  («La grandeur constante») — величина постоянная). Покажемъ теперь, что величина этихъ отношеній зависитъ отъ величины

угла  $A$ . Для этого при точкѣ  $A$  построимъ уголъ, меньше даннаго, т. е. проведемъ прямую  $AK_4$ , что намъ даетъ рядъ новыхъ подобныхъ прямоугольныхъ треугольниковъ. Изъ ихъ подобія выводимъ, какъ и раньше, два ряда равныхъ отношеній

$$1') \frac{KC}{AK} = \frac{K_1C_1}{AK_1} = \frac{K_2C_2}{AK_2} = \frac{K_3C_3}{AK_3} = \frac{K_4C_4}{AK_4} = \dots = \text{Const.}$$

$$2') \frac{AC}{AK} = \frac{AC_1}{AK_1} = \frac{AC_2}{AK_2} = \frac{AC_3}{AK_3} = \frac{AC_4}{AK_4} = \dots = \text{Const.}$$

Мы видимъ, что характеръ отношеній не измѣнился, хотя члены ихъ получили новыя значенія въ зависимости отъ новаго значенія угла  $A$ . Въ дальнѣйшемъ будетъ выяснено, что *первое отношеніе уменьшается* съ уменьшеніемъ угла, тогда какъ *второе отношеніе* въ то же время *увеличивается*. Сейчас же для насъ важно установить лишь непосредственную зависимость между угломъ треугольника и отношеніями его сторонъ.

Такъ какъ точки  $B$  и  $K$  выбраны произвольно, то длина сторонъ треугольника не играетъ никакой роли; поэтому мы въ правѣ принять указанныя отношенія за новую мѣру угла  $A$ . Они позволяютъ намъ рѣшать слѣдующіе вопросы:

- 1, по 2 сторонамъ и углу вычислить остальные элементы треугольника.
- 2, по сторонѣ и 2 угламъ вычислить остальные элементы треугольника,
- 3, по сторонамъ вычислить углы.

2. Для удобства условимся обозначать углы большими буквами, при нихъ поставленными, а противолежащія угламъ стороны—однойменными маленькими

буквами. Кромѣ того, прямой уголъ, какъ величину постоянную, будемъ всегда обозначать буквою  $C$  (начальная буква слова «Constante»), а острые—буквами  $A$  и  $B$ ; соотвѣтственно этому гипотенуза обозначается буквою  $c$ , а катеты—буквами  $a$  и  $b$ . Эти обозначенія предложены впервые Эйлеромъ \*) и съ тѣхъ поръ вошли во всеобщее употребленіе.

Примѣняя наши обозначенія къ полученнымъ отношеніямъ I) и II) мы видимъ, что первое обращается въ  $\frac{a}{c}$ , а второе—въ  $\frac{b}{c}$ . Далѣе,  $\frac{a}{c}$  есть отношеніе катета, противолежащаго углу  $A$ , къ гипотенузѣ;  $\frac{b}{c}$  есть отношеніе катета, прилежащаго углу  $A$ , къ гипотенузѣ. Если стороны измѣрены какими-нибудь одноименными линейными единицами, то величина каждаго изъ этихъ отношеній будетъ выражена *отвлеченнымъ числомъ*. Такъ, если катеты соотвѣтственно равны 3 и 4 аршинамъ, а гипотенуза — 5 аршинамъ, то первое отношеніе равно  $\frac{3}{5}$ , а второе—  $\frac{4}{5}$ . Если же стороны измѣрены различными линейными единицами, напр.  $a = 9$  футовъ, а  $c = 2$  сажени, то *отношеніе  $\frac{a}{c}$  не равно  $\frac{9}{2}$* ; такое отношеніе не имѣетъ даже смысла. Поэтому необходимо раньше выразить  $c$  тоже въ футахъ, т. е.  $c = 14$  ф.; тогда отношеніе  $\frac{a}{c} = \frac{9}{14}$  и будетъ искомымъ.

**3. Опредѣленія.**—Выраженія  $\frac{a}{c}$  и  $\frac{b}{c}$  наз. тригонометрическими отношеніями или тригонометрическими величинами. Первое, т. е. **отношеніе противолежа-**

---

\*) Acta Petrop. 1779, P. I.

щаго катета къ гипотенузѣ есть синусъ угла  $A$ , а второе, т. е. отношеніе прилежащаго катета къ гипотенузѣ есть косинусъ угла  $A$ . Итакъ

$$3) \quad \frac{a}{c} = \sin A, \quad \frac{b}{c} = \cos A.$$

Обозначеніе « $\sin A$ » слѣдуетъ разсматривать только вмѣстѣ, подобно « $\log x$ », а не разсматривать, какъ два множителя: « $\sin$ » и « $A$ ».

4. Если мы вспомнимъ разсмотренные во Введеніи треугольники, то найдемъ тамъ слѣдующія отношенія:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; слѣдовательно

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

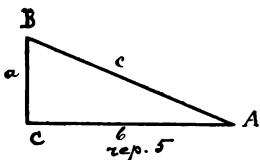
Это первыя величины синусовъ и косинусовъ, полученные нами геометрическимъ путемъ.

**5. Синусъ и косинусъ допол-**

**нительныхъ угловъ.**— Углы  $A$  и  $B$

взаимно дополняютъ другъ друга до  $90^\circ$  и поэтому называются *взаимно-дополнительными*.

Съ другой стороны, на основаніи опредѣленій синуса и косинуса, имѣемъ



$$\frac{a}{c} = \sin A = \cos B; \quad \frac{b}{c} = \cos A = \sin B;$$

откуда мы выводимъ важныя соотношенія

$$4) \quad \sin A = \cos B, \quad \cos A = \sin B,$$

т. е. синусъ острого угла равенъ косинусу дополнительнаго угла, и обратно, косинусъ острого угла равенъ синусу дополнительнаго угла.

Равенства (4) легко провѣрить для угловъ въ  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  при помощи соотношеній, помѣщенныхъ выше.

**6. Уравненіе синуса и косинуса.**—Установимъ теперь основную зависимость между синусомъ и косинусомъ. По теоремѣ Пифагора имѣемъ

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Раздѣлимъ обѣ части этого равенства на  $c^2$  (что мы вправѣ сдѣлать, такъ какъ  $c$  не равно нулю)

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1.$$

Такъ какъ  $\frac{a}{c} = \sin A$ ,  $\frac{b}{c} = \cos A$ , то  $\frac{a^2}{c^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = (\sin A)^2$ ; послѣднее выраженіе обыкновенно пишутъ такъ: « $\sin^2 A$ » и читаютъ «синусъ квадратъ  $A$ ». Подобнымъ же образомъ находимъ, что  $\frac{b^2}{c^2} = \cos^2 A$  и окончательно

$$5) \quad \sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Зная одну изъ величинъ, входящихъ въ это уравненіе, нетрудно найти и вторую; покажемъ это на нѣсколькихъ примѣрахъ.

I. Пусть  $A = 30^\circ$  и  $\sin A = \frac{1}{2}$ . Тогда

$$\cos^2 30^\circ = 1 - \sin^2 30^\circ,$$

$$\cos^2 30^\circ = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

что вполне согласуется съ найденнымъ выше значеніемъ  $\cos 30^\circ$ .

II. Проверимъ формулу (5) для  $A = 45^\circ$ . Имѣемъ

$$\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1,$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1,$$

$$2 \cdot \frac{2}{4} = 1,$$

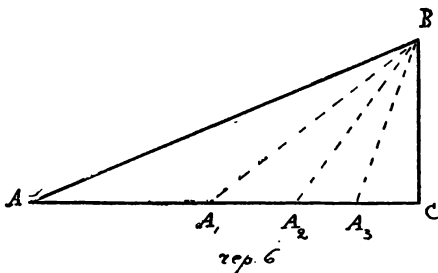
$$1 = 1.$$

Полученное тождество показываетъ, что формула вѣрна.

**7. Измѣненія синуса и косинуса.** Въ пунктѣ 1-мъ указано, что съ уменьшеніемъ угла  $A$  отношеніе  $\frac{a}{c}$  убываетъ, а отношеніе  $\frac{b}{c}$  возрастаетъ; аналогичное явленіе можно наблюдать и при увеличеніи угла  $A$ : тогда  $\frac{a}{c}$  возрастаетъ, а  $\frac{b}{c}$  — уменьшится. Все это легко прослѣдить на чертежѣ 6.

Оставляя катетъ  $a$  безъ измѣненія, будемъ уменьшать уголъ  $B$ , придавая гипотенузу  $c$  рядъ новыхъ положеній  $BA_1, BA_2,$

$BA_3, \dots$ , приближающихся къ  $a$ . Тогда уголъ  $A$ , а вмѣстѣ съ нимъ и отношеніе  $\frac{a}{c}$  будутъ возрастать и въ предѣлѣ  $A$  обратится въ  $90^\circ$ ,  $B$  — въ  $0^\circ$ ,  $c$



сольется съ  $a$  и отношеніе  $\frac{a}{c}$  обратится въ 1. Такимъ образомъ

$$\begin{aligned} 6) \quad \sin 90^\circ &= 1, \\ \cos 0^\circ &= 1. \end{aligned}$$

Съ другой стороны, при уменьшеніи угла  $B$  катетъ  $b$  будетъ уменьшаться и, при  $B=0^\circ$ , обратится въ 0. Поэтому дробь  $\frac{b}{c}$  въ предѣлѣ обратится въ 0, слѣдовательно

$$\begin{aligned} 7) \quad \sin 0^\circ &= 0, \\ \cos 90^\circ &= 0. \end{aligned}$$

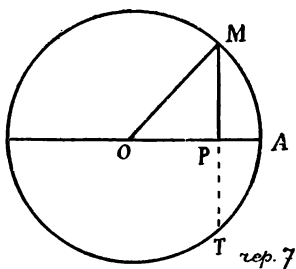
Итакъ, въ предѣлахъ отъ  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , синусъ измѣняется отъ 0 до 1, все время возрастаая, а косинусъ измѣняется отъ 1 до 0, все время убывая. Кромѣ того, отношенія  $\frac{a}{c}$  и  $\frac{b}{c}$  суть правильныя дроби, такъ какъ катеты всегда меньше гипотенузы; отсюда слѣдуетъ, что **синусы и косинусы острыхъ угловъ всегда меньше единицы** (за исключеніемъ предѣльныхъ значеній угла— $0^\circ$  и  $90^\circ$ ).

---

## Глава II. Таблицы натуральныхъ синусовъ и косинусовъ.

8. Для рѣшенія прямоугольнаго треугольника путемъ вычисленія необходимо уметь находить величины синусовъ (или косинусовъ) его угловъ. Графическій способъ даетъ, конечно, легкое рѣшеніе вопроса: построивъ данный прямоугольный треуголь-

никъ и измѣривъ по масштабу катетъ и гипотенузу, раздѣлить первое изъ полученныхъ чиселъ на второе; результатъ дѣленія дастъ величину искомага синуса (или косинуса). Но мы уже знаемъ, насколько этотъ способъ грубъ и неточенъ, поэтому въ математическихъ вычисленіяхъ о немъ не можетъ быть и рѣчи. Существуетъ другой путь, которымъ мы обязаны генію Гиппарха, а затѣмъ и его преемниковъ (см. историческій очеркъ); этимъ путемъ мы и пойдемъ.



**9. Связь между синусомъ и хордою.**—Пусть  $MT$  (чер. 7) есть хорда, равная сторонѣ правильного вписаннаго многоугольника, число сторонъ котораго равно  $n$ , а радіусъ описаннаго круга —  $R$ ; тогда центръальный уголъ  $MOT$  равенъ  $\frac{360^\circ}{n}$ . Обозначимъ сторону этого многоугольника черезъ  $a_n$  и рассмотримъ прямоугольный треугольникъ  $MOP$ . Имѣемъ

$$\sin \angle MOP = \frac{MP}{OM}.$$

Но  $\angle MOP = \frac{1}{2} \angle MOT = \frac{180^\circ}{n}$ ,  $MP = \frac{1}{2} MT = \frac{a_n}{2}$ ,  $OM = R$ , поэтому

$$8) \quad \sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{a_n}{2R},$$

**т.-е. отношеніе стороны правильнаго вписаннаго многоугольника къ діаметру есть синусъ половины центръального угла, опирающагося на эту сторону.**

10. Выведенная нами формула имѣетъ важное практическое значеніе. Именно, зная зависимость между сторонами нѣкоторыхъ правильныхъ многоугольниковъ и радіусами описанныхъ круговъ, мы безъ труда найдемъ синусы нѣкоторыхъ опредѣленныхъ острыхъ угловъ; зависимость же эта установлена въ планиметріи.

11. Перейдемъ къ приложеніямъ полученной формулы.

I.  $n = 3$ . Имѣемъ  $\frac{180^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{3}$ ,  $a_3 = R\sqrt{3}$ ; итакъ

$$\sin \frac{180^\circ}{3} = \frac{R\sqrt{3}}{2R},$$

откуда

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

результатъ, полученный раньше совершенно независимымъ путемъ.

II.  $n = 4$ . Имѣемъ  $\frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$ ,  $a_4 = R\sqrt{2}$  и

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

III.  $n = 6$ . Имѣемъ  $\frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$ ,  $a_6 = R$  и

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

IV.  $n = 10$ . Имѣемъ  $\frac{180^\circ}{10} = 18^\circ$ ,  $a_{10} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  и

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Этотъ синусъ у насъ еще не встрѣчался.

V.  $n = 2$ . Въ данномъ случаѣ многоугольника не существуетъ; но легко видѣть, что  $a_2$  означаетъ діаметръ и

$$\sin 90^\circ = 1.$$

VI.  $n = \infty$ . Многоугольникъ превратился въ кругъ, центральный уголъ въ  $0^\circ$  и  $a_n$  въ 0; тогда наша формула даетъ

$$\sin 0^\circ = 0.$$

12. Кромѣ перечисленныхъ случаевъ, можно воспользоваться также формулами удвоения и найти  $a_n$  при  $n = 5, 15, 8, 12, 20$  и т. п.

Затѣмъ, пользуясь свойствомъ дополнительныхъ угловъ, а также уравненіемъ синуса и косинуса можно найти новые синусы и т. д.

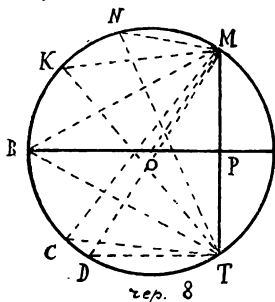
Въ нижеслѣдующей табличкѣ приведены значенія синусовъ и косинусовъ, вычисленные указаннымъ способомъ.

| Уголъ.         | Синусъ.                         | Косинусъ.                       | Уголъ.         |
|----------------|---------------------------------|---------------------------------|----------------|
| $0^\circ$      | 0                               | 1                               | $90^\circ$     |
| $15^\circ$     | $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$ | $75^\circ$     |
| $18^\circ$     | $\frac{\sqrt{5} - 1}{4}$        | $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ | $72^\circ$     |
| $22^\circ 30'$ | $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$ | $67^\circ 30'$ |
| $30^\circ$     | $\frac{1}{2}$                   | $\frac{\sqrt{3}}{2}$            | $60^\circ$     |
| $36^\circ$     | $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$          | $54^\circ$     |
| $45^\circ$     | $\frac{\sqrt{2}}{2}$            | $\frac{\sqrt{2}}{2}$            | $45^\circ$     |
| Уголъ.         | Косинусъ.                       | Синусъ.                         | Уголъ.         |

Устройство этой таблички весьма просто. Зная, что синусъ острого угла равенъ косинусу дополнительнаго, мы находимъ

$$9) \quad \sin (45^\circ + \alpha) = \cos (45^\circ - \alpha).$$

Такимъ образомъ всѣ синусы угловъ, большихъ  $45^\circ$ , находятся въ столбцѣ для косинусовъ, и обратно.



Если нужно найти, напр., синусъ  $54^\circ$ , то я смотрю столбецъ съ надписью «синусъ» внизу (или косинусъ наверху); подобнымъ же образомъ и углы — отъ  $0^\circ$  до  $45^\circ$  расположены въ лѣвомъ столбцѣ, а отъ  $45^\circ$  до  $90^\circ$  — въ правомъ.

13. Полученный нами выводъ (8) можно обобщить слѣдующимъ образомъ. Пусть  $MT$  (чер. 8) какая угодно хорда; тогда  $\sin \frac{1}{2} \angle MOT = \frac{MT}{2R}$ . Далѣе, всѣ вписанные углы  $MNT$ ,  $MKT$ ,  $MBT$ ,  $MCT$ ,  $MDT$  опираются на одну и ту же хорду  $MT$ , слѣдовательно, они измѣряются половиною дуги  $MAT$ ; поэтому  $\angle MNT = \angle MKT = \angle MBT = \angle MCT = \angle MDT = \angle MOA$ , и окончательно  $\frac{MT}{2R} = \sin \angle MOA = \sin N = \sin K = \sin B = \sin C = \sin D$ , т.-е. отношеніе хорды къ діаметру есть синусъ вписаннаго угла, опирающагося на эту хорду.

**Примѣръ 1.** Возьмемъ окружность радіуса  $R=3$  метрамъ и въ ней хорду въ 2 метра; тогда вписанный уголь  $x$ , опирающійся на эту хорду, опредѣлится уравненіемъ:  $\sin x = \frac{1}{3}$ . Справившись съ таб-

личкой, помѣщенной выше, мы видимъ, что  $x$  заключается между  $18^\circ$  и  $22^\circ 30'$ , ближе къ первому.

**Примѣръ 2.** Найти хорду, вписанную въ окружность радіуса  $R = 5$  метр., если вписанный уголъ, опирающійся на нее, содержитъ  $67^\circ 30'$ . Имѣемъ:  $\sin 67^\circ 30' = \frac{y}{10}$ , гдѣ  $y$  — неизвѣстная хорда. Полагая  $\sin 67^\circ 30' = 0,92$  (прибл.), находимъ  $y = 9,2$  метра.

**14. Таблицы натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ.** Если мы какими-нибудь приемами вычислимъ размѣры хордъ для различныхъ вписанныхъ угловъ, на нихъ опирающихся, то тогда мы можемъ составить таблицу значеній синусовъ, расположенныхъ въ извѣстномъ порядкѣ. Подобныя таблицы и были составлены еще Гиппархомъ, а за нимъ и другими; онѣ носятъ названіе «таблицъ натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ» въ отличіе отъ таблицъ, содержащихъ логариѣмы тѣхъ же величинъ. Въ дальнѣйшемъ мы будемъ пользоваться такой таблицей, помѣщенной на 86-й стр. собранія таблицъ, изданныхъ проф. С. П. Глазенапомъ. Въ ней даны значенія синусовъ и косинусовъ для угловъ отъ  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , возрастающихъ на одинъ градусъ. Эти значенія вычислены съ 4-мя десятичными знаками и такимъ образомъ мы заранѣе знаемъ, что возможная ошибка не превышаетъ *одной десятичной тысячной*. Что же касается расположенія таблицъ, то оно вполне совпадаетъ съ расположеніемъ нашей таблички, помѣщенной выше, на стр. 12.

#### Примѣръ 1.

Найти  $\sin 20^\circ$  и  $\cos 20^\circ$ . На стр. 86 Глазенапа, столбцѣ съ надписью «Sin» наверху находимъ

$$\sin 20^\circ = 0,3420; \cos 20^\circ = 0,9397.$$

Подставляя эти значенія въ формулу (5), получимъ

$$\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = 1,00000009;$$

ошибка составляет  $\frac{9}{10^8}$ , т.-е. ошибки меньше одной десятимилліонной.

### Примѣръ II.

Найти  $x$ , если  $\sin x = 0,8660$ . Для этого ищемъ въ столбцѣ «Sin» число 0,8660; его нѣтъ въ верхнемъ столбцѣ, поэтому мы переходимъ къ послѣднему направо, подѣ которымъ снизу подписано тоже «Sin». Мы находимъ это число противъ угла  $60^\circ$  (справа). Результатъ легко провѣрить по нашей табличкѣ. Дѣйствительно,  $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sqrt{3} = 1,732$  (прибл.) и  $\sin 60^\circ = 0,866$ .

### Примѣръ III.

Найдемъ  $\sin 76^\circ 20'$ . Такъ какъ для минутъ синусы не даны, то мы находимъ  $\sin 76^\circ = 0,9703$  и  $\sin 77^\circ = 0,9744$ ; между этими значеніями заключается искомый синусъ. Находимъ, далѣе, разность  $\sin 77^\circ - \sin 76^\circ$ ; она равна 41 и наз. табличная разность синусовъ для даннаго промежутка. Предполагая, что при малыхъ измѣненіяхъ угла эти измѣненія пропорціональны измѣненіямъ синуса (такое предположеніе будетъ обосновано въ IV главѣ II-ой части), мы составляемъ пропорцію:  $60' : 20' = 41 : x$ , гдѣ  $x$  обозначаетъ приростъ синуса, соотвѣтствующій приросту въ  $20'$  угла. Отсюда  $x = 14$  (прибл.) и окончательно

$$\sin 76^\circ 20' = 0,9717.$$

#### Примѣръ IV.

Дано:  $\cos x = 0,6$ ; найти уголъ  $x$ . На стр. 86 Глазенапа находимъ

$$\cos 53^\circ = 0,6018; \cos 54^\circ = 0,5878.$$

Составляемъ пропорцію

$$140 : 18 = 60' : y',$$

откуда  $y = 7'43''$  (прибл.). Такъ какъ съ увеличеніемъ угла косинусъ убываетъ, то найденную поправку надо прибавить къ  $53^\circ$ ; итакъ

$$x = 53^\circ 7' 43'' \text{ (прибл.)};$$

ошибка меньше 10 секундъ.

---

### Глава III. Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ при помощи синуса и косинуса.

15. Если въ прямоугольномъ треугольникѣ даны два изъ его элементовъ, кромѣ прямого угла, то треугольникъ считается опредѣленнымъ. Исключеніемъ является лишь случай заданія двухъ острыхъ угловъ, такъ какъ тогда можно найти безчисленное множество треугольниковъ, подобныхъ другъ другу и, слѣдовательно, удовлетворяющихъ условіямъ заданія.

16. Основными заданіями считаются четыре слѣдующихъ, соотвѣтствующихъ четыремъ признакамъ равенства прямоугольныхъ треугольниковъ:

- I. Гипотенуза и одинъ изъ острыхъ угловъ,
- II. Гипотенуза и одинъ изъ катетовъ,

III. Катетъ и одинъ изъ острыхъ угловъ,

IV. Оба катета.

Необходимо имѣть въ виду, что гипотенуза по заданію должна быть больше катета; а каждый изъ прилежащихъ ей угловъ не долженъ превышать  $90^\circ$ , иначе треугольникъ невозможенъ. Если стороны будутъ заданы въ числахъ разныхъ наименованій (конечно, линейныхъ), то, прежде чѣмъ приступить къ рѣшенію, необходимо выразить всѣ числа въ единицахъ одного наименованія.

**17. Формулы.** Формулы для рѣшенія прямоугольнаго треугольника получаются непосредственно изъ основныхъ опредѣленій синуса и косинуса его острыхъ угловъ. Имѣемъ

$$\frac{a}{c} = \sin A = \cos B; \quad \frac{b}{c} = \sin B = \cos A,$$

откуда получаемъ двѣ группы формулъ

$$\begin{array}{ll} 10) & a = c \cdot \sin A, \\ & b = c \cdot \sin B, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 11) & a = c \cdot \cos B, \\ & b = c \cdot \cos A. \end{array}$$

Эту зависимость на словахъ обыкновенно выражаютъ такъ:

**Катетъ равенъ гипотенузѣ, умноженной на синусъ противолежащаго угла или на косинусъ прилежащаго угла.**

**Примѣръ I.**

Рѣшить треугольникъ, если гипотенуза равна 5 саж., а уголъ  $A = 30^\circ$ .

**Рѣшеніе.**

Намъ нужно найти оба катета, второй острый уголъ и площадь треугольника  $F$ . По формуламъ

имѣемъ

$$1) \quad a = c \cdot \sin A,$$

$$2) \quad b = c \cdot \cos A,$$

$$3) \quad B = 90^\circ - A,$$

$$4) \quad F = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Подставляя данныя, находимъ

$$a=2,5 \text{ саж.}, b=4,33 \text{ саж.}, B=60^\circ, F=5,4125 \text{ кв. саж.}$$

Повѣрка по теоремѣ Пифагора даетъ

$$2,5^2 + 4,33^2 = 24,9989,$$

т.-е. ошибка меньше одной тысячной.

### Примѣръ II.

Гипотенуза равна 14 метр., катетъ  $a=7$  метр.

Рѣшить треугольникъ.

Рѣшеніе.

Имѣемъ

$$1) \quad \sin A = \frac{a}{c},$$

$$2) \quad B = 90^\circ - A,$$

$$3) \quad b = \sqrt{c^2 - a^2},$$

$$4) \quad F = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Подставляя данныя, находимъ

$$A=30^\circ, B=60^\circ, b=7\sqrt{3} \text{ метр.}, F=24,5\sqrt{3} \text{ кв. метр.}$$

Если же  $b$  вычислить по формулѣ:  $b = c \cdot \cos A$ , то съ точностью до одной тысячной имѣемъ

$$b=12,124 \text{ метр.}, F=42,434 \text{ кв. м.}$$

### Примѣръ III.

Острый уголъ  $A$  треугольника равенъ  $38^\circ$ , а прилежащій катетъ = 50 саж. Рѣшить треугольникъ.

Рѣшеніе.

$$1) b = c \cdot \cos A, \quad 3) a = c \cdot \sin A,$$

$$2) c = \frac{b}{\cos A}, \quad 2) a = b \cdot \frac{\sin A}{\cos A},$$

$$5) F = b^2 \frac{\sin A}{2 \cos A}.$$

Подставляя данныя, находимъ  $c = 63,45$  саж.,  $\frac{\sin A}{\cos N} = 0,7813$ ,  $a = 39,065$  саж. и  $F = 976,625$  кв. саж.

### Примѣръ IV.

Въ равнобедренномъ треугольникѣ  $ABC$  (чер. 9) основаніе  $AC = 40$  м., а уголъ  $B$  при вершинѣ =  $48^\circ$ . Рѣшить треугольникъ.

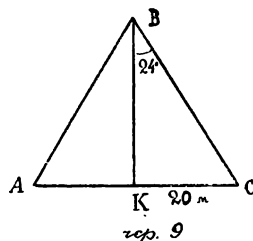
Рѣшеніе.

$$1) BC = \frac{20}{\sin 24^\circ},$$

$$2) BK = BC \cdot \cos 24^\circ,$$

$$3) BK = 20 \cdot \frac{\cos 24^\circ}{\sin 24^\circ},$$

$$F = 400 \cdot \frac{\cos 24^\circ}{\sin 24^\circ}.$$



Подставляя  $\frac{\cos 24^\circ}{\sin 24^\circ} = 2,246$ , находимъ  $BC = 49,176$  м.,  $BK = 44,922$  м.,  $F = 898,45$  кв. м.

## Глава IV. Рѣшеніе прямоугольныхъ треугольниковъ при помощи тангенса и котангенса.

18. Въ двухъ послѣднихъ примѣрахъ намъ приходилось вычислять выраженія  $\frac{\cos 24^\circ}{\sin 24^\circ}$  и  $\frac{\sin 38^\circ}{\cos 38^\circ}$ . Такія выраженія встрѣчаются постоянно при рѣшеніи тре-

угольниковъ; они бываютъ двухъ слѣдующихъ видовъ

$$\frac{\sin x}{\cos x} \text{ и } \frac{\cos x}{\sin x},$$

гдѣ  $x$  обозначаетъ острый уголъ прямоугольнаго треугольника. Неудобства, сопряженные съ дѣленіемъ такихъ чиселъ, какъ  $\sin x$  и  $\cos x$ , другъ на друга привели къ составленію новой таблицы, въ которой приведены въ готовомъ видѣ частныя такихъ дѣлений; сами же отношенія получили особыя названія: первое изъ нихъ называютъ тангенсомъ, а второе — котангенсомъ угла  $x$ , т.-е.

$$12) \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

**19. Опредѣленія.** Я укажу теперь, какъ выразить тангенсъ и котангенсъ въ зависимости отъ сторонъ прямоугольнаго треугольника. Для этого въ формулы (12) вмѣсто  $\sin x$  и  $\cos x$  подставимъ равнозначныя имъ отношенія  $\frac{a}{c}$  и  $\frac{b}{c}$ , а самый уголъ  $x$  замѣнимъ угломъ  $A$ . Тогда простое дѣленіе непосредственно даетъ

$$13) \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} A, \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} A,$$

т.-е. отношеніе противолежащаго катета къ прилежащему есть тангенсъ, а отношеніе прилежащаго катета къ противолежащему есть котангенсъ остраго угла прямоугольнаго треугольника.

Итакъ, тангенсъ и котангенсъ можно разсматривать, какъ особыя тригонометрическія величины; подобно предыдущимъ—синусу и косинусу—онѣ зависятъ лишь отъ величины угла  $A$ .

**20. Формулы.** Изъ установленныхъ опредѣленій вытекаетъ, что

$$14) \quad \operatorname{tg} A = \frac{1}{\operatorname{ctg} A}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A},$$

т.-е. тангенсъ и котангенсъ суть величины, взаимно-обратныя другъ другу. Эту зависимость между ними часто выражаютъ формулой

$$15) \quad \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{ctg} A = 1.$$

Далѣе, такъ какъ  $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$  и  $\operatorname{ctg} B = \frac{a}{b}$ , то  $\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B$ ; но  $A$  и  $B$  взаимно-дополнительные углы, слѣдовательно

$$16) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg} A &= \operatorname{ctg} B, \\ \operatorname{ctg} A &= \operatorname{tg} B, \end{aligned}$$

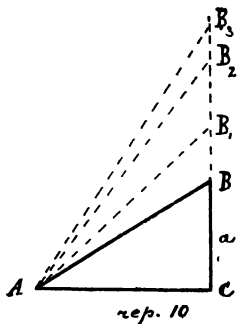
т.-е. тангенсъ остраго угла равенъ котангенсу дополнительнаго угла, и обратно, котангенсъ остраго угла равенъ тангенсу дополнительнаго.

**21. Вычисленіе тангенсовъ и котангенсовъ.** Зная синусъ и косинусъ какого-нибудь остраго угла, мы можемъ сейчасъ же по формуламъ (12) вычислить тангенсъ и котангенсъ. Такъ для угла въ  $30^\circ$  имѣемъ:  
 $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$ ; для угла въ  $60^\circ$  —  
 $\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ . Если же уголь равенъ  $45^\circ$ , то  $a=b$  и  $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$ .

Та же таблица Глазенапа служить для нахождения значеній тангенсовъ и котангенсовъ; приемы пользованія ею совершенно тѣ же.

**22. Измѣненіе тангенса и котангенса.** Такъ какъ отношенія  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{b}{a}$  могутъ принимать различную ве-

личину (катеты могутъ быть равными и неравными), то тангенсы и котангенсы могутъ выражаться какъ дробными, такъ и цѣлыми отвлеченными числами. Если  $A=0$ , то катетъ  $a$  тоже равенъ 0, и  $\operatorname{tg} 0^\circ=0$ ,  $\operatorname{ctg} 0^\circ=\infty$ . При  $A=90^\circ$  катетъ  $b=0$  и поэтому  $\operatorname{tg} 90^\circ=\infty$ ,  $\operatorname{ctg} 90^\circ=0$ . Легко замѣтить, что  $\operatorname{tg} A$  возрастаетъ съ возрастаниемъ  $A$ ,  $\operatorname{ctg} A$  убываетъ съ возрастаниемъ  $A$  (чер. 10); кромѣ того, въ промежуткѣ отъ  $0^\circ$  до  $45^\circ$  тангенсъ возрастаетъ отъ 0 до 1, оставаясь все время правильною дробью; наоборотъ, котангенсъ убываетъ отъ 1 до 0, когда уголъ возрастаетъ отъ  $45^\circ$  до  $90^\circ$ , тоже оставаясь правильною дробью. Итакъ, *тангенсъ растетъ отъ нуля до безконечности, а котангенсъ убываетъ отъ безконечности до нуля.*



**23. Формулы для рѣшенія прямоугольнаго треугольника.** Изъ основныхъ опредѣленій тангенса и котангенса слѣдуетъ

$$\begin{aligned} 17) \quad a &= b \cdot \operatorname{tg} A, & a &= b \cdot \operatorname{ctg} B, \\ b &= a \cdot \operatorname{tg} B, & b &= a \cdot \operatorname{ctg} A, \end{aligned}$$

т.-е. катетъ равенъ другому катету, умноженному на тангенсъ угла, противолежащаго первому или на котангенсъ угла, прилежащаго первому.

#### Примѣръ I.

Рѣшить треугольникъ по катету  $a=400$  арш. и углу  $A=63^\circ$ .

Рѣшеніе.

Имѣемъ

$$1) \quad b = a \cdot \operatorname{ctg} A,$$

$$2) \quad B = 90^\circ - A,$$

$$3) \quad c = \frac{a}{\sin A},$$

$$4) \quad F = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Подставляя данныя  $a$  и  $A$  (т.-е. взявъ по таблицамъ  $\operatorname{ctg} A = 0,5095$  и  $\sin A = 0,8910$ ) и производя вычисленія, находимъ

$$b = 203,8 \text{ арш.}, \quad B = 27^\circ, \quad c = 448,93 \text{ арш.}, \\ F = 40760 \text{ кв. арш.}$$

Повѣряя по теоремѣ Пифагора, находимъ  $c = \sqrt{400^2 + 203,8^2} = \sqrt{201534,44}$ ;  $c = 448,92$  арш., что даетъ ошибку въ одну сотую аршина.

Примѣръ II.

Рѣшить треугольникъ по катетамъ  $a = 43$  саж. и  $b = 15$  саж.

Рѣшеніе.

Имѣемъ

$$1) \quad \operatorname{tg} A = \frac{a}{b},$$

$$2) \quad \operatorname{tg} B = \frac{b}{a},$$

$$3) \quad c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$4) \quad F = \frac{a \cdot b}{2}.$$

1. Оставляя вмѣсто  $a$  и  $b$  ихъ значенія, находимъ

$$\operatorname{tg} A = 2,8667 \text{ (прибл.)},$$

$$\operatorname{tg} B = 0,3488 \text{ (прибл.)}.$$

Покажемъ, какъ вычислить теперь  $A$  и  $B$ . Изъ таблицы тангенсовъ получаемъ

$$\operatorname{tg} 71^\circ = 2,9042,$$

$$\operatorname{tg} 70^\circ = 2,7475;$$

поэтому  $A$  заключается между  $71^\circ$  и  $70^\circ$ . Составимъ пропорцію

$$1567 : 1192 = 60' : x',$$

откуда  $x = 45' 38'', 47$ . Совершенно также находимъ поправку для угла  $B$ , а именно:  $13' 42'', 33$ . Такъ какъ съ увеличеніемъ угла тангенсы возрастаютъ, то поправки надо прибавить къ угламъ.

Итакъ

$$A = 70^\circ 45' 38'', 47,$$

$$B = 19^\circ 13' 42'', 33.$$

Повѣрка даетъ:  $A + B = 89^\circ 59' 20'', 8$ ; ошибка — почти  $40''$ , но при данныхъ размѣрахъ сторонъ существеннаго значенія не имѣетъ.

Наконецъ  $c = 45,54$  саж. (прибл.),  $F = 322,5$  кв. с.

---

## Глава V. Таблицы логарифмовъ тригонометрическихъ величинъ.

24. Недостатки натуральныхъ таблицъ. Таблицы натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ, называемыя для краткости «натуральныя таблицы», употребляются въ тѣхъ случаяхъ, когда вычисленія не

требуютъ большой точности, т.-е. когда стороны можно выражать числами съ 2-мя или 3-мя десятичными знаками, а углы — съ точностью до одной минуты. Но даже и при этихъ условіяхъ неудобства вычисленій довольно значительны, такъ какъ постоянно приходится умножать и дѣлить многозначныя числа; кромѣ того, что еще важнѣе, въ 4-значныхъ таблицахъ натуральныхъ тригонометрическихъ величинъ отброшены всѣ десятичныя цифры послѣ 4-ой, а мы сейчасъ увидимъ, что при умноженіи или дѣленіи двухъ такихъ величинъ отброшенные цифры могутъ сильно повліять на результатъ. Для иллюстраціи я приведу два примѣра.

25. Положимъ, что требуется вычислить катетъ  $a$  по формулѣ

$$a = c \cdot \sin A,$$

гдѣ  $c = 8632,6$  метр., а  $\sin A$  по 4-ехзначнымъ таблицамъ равенъ 0,0003.

Тогда

$$1) \quad a = 2,58978 \dots \text{ мет.}$$

Предположимъ теперь, что въ величинѣ  $\sin A$  отброшенные (послѣ 3) цифры суть 294 . . . .; въ этомъ случаѣ

$$I') \quad a = 2,84357 \dots \text{ мет.}$$

Послѣднее показываетъ, что *результатъ (I) неправиленъ уже съ первой десятичной цифры.*

Пусть еще гипотенуза  $c$  опредѣляется по формулѣ

$$c = \frac{a}{\cos B},$$

гдѣ  $a = 1,3$  мет., а  $\cos B$  по тѣмъ же таблицамъ равенъ 0,0004; тогда

$$\text{II)} \quad c = 3250 \text{ метр.};$$

но принимая во вниманіе отброшенныя въ величинѣ  $\cos B$  цифры (послѣ 4) 418 . . . . , находимъ

$$\text{II')} \quad c = 2942,5 \text{ . . . . метр.}$$

Здѣсь *результатъ (II) невѣренъ даже съ первой цифрой; ошибка составляетъ слишкомъ 307 метровъ!*

**26. Логариѳмическія таблицы.** Итакъ, натуральныя таблицы вообще не удовлетворяютъ требованіямъ точности вычисленій; поэтому приходится ихъ замѣнить другими. Принимая во вниманіе, что тригонометрическія величины суть отвлеченныя числа, слѣдовательно, ихъ можно логариѳмировать, были составлены таблицы съ логариѳмами синусовъ, косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ угловъ отъ  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , различающихся другъ отъ друга на  $1'$ . Кромѣ того, при помощи табличныхъ разностей легко находятся поправки на секунды и доли секунды, такъ что вычисленія могутъ быть произведены съ желаемою степенью точности, обусловливаемой, конечно, выборомъ таблицъ.

Всѣ логариѳмы тригонометрическихъ величинъ вычислены съ однимъ и тѣмъ же числомъ десятичныхъ знаковъ, но въ различныхъ таблицахъ это число различно; такъ существуютъ таблицы 4-ехзначныя, 5-тизначныя, 6-ти, 7-ми и даже 10-тизначныя. Наиболѣе извѣстны изъ этихъ таблицъ слѣдующія: изъ 7-мизначныхъ — таблицы Callet и Vega (въ обработкѣ Брѣмкѣра), въ которыхъ вычислены логариѳмы тригонометри-

ческихъ величинъ угловъ, возрастающихъ на  $10''$ ; изъ 5-тизначныхъ—Lalande и Hoüel. Въ Россіи наиболѣе извѣстны таблицы Пржевальскаго и Глазенапа; послѣднія составлены по образцу таблицъ Hoüel'a и представляютъ большія преимущества въ сравненіи съ таблицами Пржевальскаго. Въ настоящей книгѣ вычисленія произведены по таблицамъ Глазенапа.

**27. Расположеніе логариѳмическихъ вычисленій.** Составъ и употребленіе таблицъ Глазенапа объяснено вполне достаточно въ предисловіи къ нимъ, и надъ этимъ я останавливаться не буду. Для нашихъ же цѣлей важно умѣть располагать данныя при вычисленіяхъ съ помощью логариѳмовъ и готовить формулы для непосредственнаго ихъ логариѳмированія. Этимъ мы и займемся.

### Примѣръ I.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ по гипотенузѣ  $c = 232,35$  саж. и углу  $B = 34^{\circ} 14' 32''$ .

### Рѣшеніе.

Какъ и раньше, имѣемъ

$$1) \quad a = c \cdot \cos B,$$

$$2) \quad b = c \cdot \sin B,$$

$$3) \quad A = 90^{\circ} - B,$$

$$4) \quad F = \frac{a \cdot b}{2}.$$

Подставляя вмѣсто  $c$  и  $B$  ихъ значенія, получимъ сразу для  $A$  значеніе  $55^{\circ} 45' 28''$ . Остальные неизвѣстныя мы вычислимъ постепенно.

### Расположеніе вычисленій.

|                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>I) <math>c = 232,35 \times</math><br/> <math>\times \cos 34^\circ 14' 32'',</math><br/> <math>\lg a = \lg 232,35 +</math><br/> <math>+ \lg \cos 34^\circ 14' 32'',</math><br/> <math>\lg a = 2,28348;</math><br/> <math>a = 192,078 \text{ саж.}</math></p>  | <p>I) <math>\lg \cos 34^\circ 14' = 9,91738 - 10</math><br/> <math>\begin{array}{r} 30'' \dots 4,5 \\ 2'' \dots 0,3 \end{array}</math><br/> <math>+ \lg \cos 34^\circ 14' 32'' = 9,91733 - 10</math><br/> <math>+ \lg 232,35 = 2,36615</math><br/> <math>\hline 2,28348</math><br/> <math>N \lg 2,28330 = 192,0</math><br/> <math>\begin{array}{r} 16,1 \dots 0,7 \\ 1,84 \dots 0,8 \end{array}</math><br/> <math>N \lg 2,28348 = 192,078</math></p> |
| <p>II) <math>b = 232,35 \times</math><br/> <math>\times \sin 34^\circ 14' 32'',</math><br/> <math>\lg b = \lg 232,35 +</math><br/> <math>+ \lg \sin 34^\circ 14' 32'',</math><br/> <math>\lg b = 2,11642;</math><br/> <math>b = 130,742 \text{ саж.}</math></p> | <p>II) <math>\lg \sin 34^\circ 14' = 9,73017 - 10</math><br/> <math>\begin{array}{r} 30'' \dots 9,5 \\ 2'' \dots 0,63 \end{array}</math><br/> <math>+ \lg \sin 34^\circ 14' 32'' = 9,73027 - 10</math><br/> <math>+ \lg 232,35 = 2,36615</math><br/> <math>\hline 2,11642</math></p>                                                                                                                                                                 |
| <p>III) <math>F = \frac{a \cdot b}{2}, \lg F =</math><br/> <math>= \lg a + \lg b - \lg 2;</math><br/> <math>\lg F = 4,09887;</math><br/> <math>F = 12556,6 \text{ кв. саж.}</math></p>                                                                          | <p>III) <math>\lg a = 2,28348</math><br/> <math>+ \lg b = 2,11642</math><br/> <math>\hline 4,39990</math><br/> <math>- \lg 2 = 0,30103</math><br/> <math>\hline 4,09887</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                                   |

### Повѣрка.

Повѣряя по формулѣ Пифагора, получимъ

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = 232,35 \text{ саж.,}$$

если ограничиться двумя десятичными знаками. Такимъ образомъ вычисленія при помощи логарифмовъ даютъ гораздо болѣе точные результаты, чѣмъ вычисленія при помощи натуральныхъ таблицъ.

### Примѣръ II.

Гипотенуза  $c = 50,6$  метр., катеть  $b = 47,8126$  метр.  
Рѣшить треугольникъ.

# Рѣшеніе.

По общимъ формуламъ имѣемъ

$$1) \cos A = \frac{b}{c},$$

$$2) \sin B = \frac{b}{c},$$

$$3) a = c \cdot \sin A,$$

$$4) F = \frac{a \cdot b}{2}.$$

## Расположеніе вычисленій.

|                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>I) <math>\cos A = \frac{478,126}{506},</math><br/> <math>\lg \cos A = \lg 478,126 -</math><br/> <math>\quad \quad \quad - \lg 506;</math><br/> <math>\lg \cos A = 9,97539 - 10;</math><br/> <math>A = 19^\circ 6' 23''.</math></p>         | <p>I) <math>\lg 478,126 = 2,67954</math><br/> <math>\lg 506 = 2,70415</math><br/> <hr/> <math>9,97539 - 10</math><br/> <math>9,97541 \dots \dots 19^\circ 6' -</math><br/> <div style="text-align: right;">(для косинуса)</div> <math>1,7 \dots \dots 20''</math><br/> <math>2,5 \dots \dots 3''</math><br/> <hr/> <math>9,97539 \dots \dots 19^\circ 6' 23''</math></p> |
| <p>II) <math>\lg \sin B = 9,97539 - 10;</math><br/> <math>B = 70^\circ 53' 36''.</math></p>                                                                                                                                                   | <p>II) <math>9,97536 \dots \dots 70^\circ 53' -</math><br/> <div style="text-align: right;">(для синуса)</div> <math>2,5 \dots \dots 30''</math><br/> <math>0,5 \dots \dots 6''</math><br/> <hr/> <math>9,97539 \dots \dots 70^\circ 53' 36''</math></p>                                                                                                                 |
| <p>III) <math>a = 50,6 \sin 19^\circ 6' 23'',</math><br/> <math>\lg a = \lg 50,6 +</math><br/> <math>\quad \quad \quad + \lg \sin 19^\circ 6' 23'',</math><br/> <math>\lg a = 1,21912;</math><br/> <math>a = 16,5627 \text{ метр.}</math></p> | <p>III) <math>\lg 50,6 = 1,70415</math><br/> <math>\lg \sin 19^\circ 6' 23'' = 9,51498 - 10</math><br/> <hr/> <math>1,21913</math><br/> <math>N 1,21906 \dots \dots 16,56</math><br/> <math>5,2 \dots \dots 0,2</math><br/> <math>1,82 \dots \dots 0,07</math><br/> <hr/> <math>N 1,21913 \dots \dots 16,5627</math></p>                                                 |
| <p>IV) <math>F = \frac{a \cdot b}{2}, \lg F = \lg a +</math><br/> <math>\quad \quad \quad + \lg b - \lg 2,</math><br/> <math>\lg F = 2,59764,</math><br/> <math>F = 395,945 \text{ кв. метр.}</math></p>                                      | <p>IV) <math>+ \lg a = 1,21913</math><br/> <math>\lg b = 1,67954</math><br/> <hr/> <math>2,89 87</math><br/> <math>- \lg 2 = 0,30103</math><br/> <hr/> <math>2,59764</math></p>                                                                                                                                                                                          |

## Повѣрка.

Сначала для угловъ находимъ

$$A + B = 19^\circ 6' 23'' + 70^\circ 53' 36'' = 89^\circ 59' 59'',$$

т. е. ошибка для обоихъ угловъ вмѣстѣ составляетъ 1 секунду.

Далѣе по теоремѣ Пифагора

$$a = \sqrt{c^2 - b^2},$$

$$a = 16,5624 \text{ метр.},$$

т. е. ошибка меньше одной тысячной.

### Примѣръ III.

Въ равнобедренномъ треугольникѣ основаніе  $a = 18$  метр., высота  $h = 10$  метр. Рѣшить треугольникъ.

Рѣшеніе.

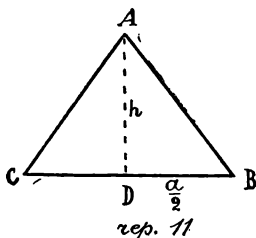
Проведя высоту  $AD$ , получимъ прямоугольный треугольникъ  $ABD$  (чер. 11), въ которомъ  $AD = h$ ,  $BD = \frac{a}{2}$ ,  $AB = c$ ,  $\angle BAD = \frac{A}{2}$ . Рѣшая его по общимъ формуламъ, получимъ

$$1) \quad c = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}},$$

$$2) \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{a}{2h},$$

$$3) \quad \operatorname{ctg} B = \frac{a}{2h},$$

$$4) \quad F = \frac{ah}{2}.$$



Подставляя данныя, непосредственно находимъ:  $c = 13,454$  метр. и  $F = 90$  к. м. Остается вычислить углы.

**Расположеніе вычисленій.**

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>I) <math>\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{18}{20} = 0,9;</math><br/> <math>\lg \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \lg 0,9;</math><br/> <math>\lg \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 9,95424 - 10;</math><br/> <math>\frac{A}{2} = 41^{\circ} 59' 14'';</math><br/> <math>A = 83^{\circ} 58' 28''.</math></p> | <p>I) <math>9,95418 \dots 41^{\circ} 59'</math><br/> <math>\quad + \quad 4,3 \dots \dots 10''</math><br/> <math>\quad + \quad 1,73 \dots \dots 4''</math><br/> <hr/> <math>9,95424 \dots 41^{\circ} 59' 14''</math></p> |
| <p>II) <math>\operatorname{ctg} B = 0,9;</math><br/> <math>\lg \operatorname{ctg} B = 9,95424 - 10;</math><br/> <math>B = 48^{\circ} 0' 46''.</math></p>                                                                                                                                                       | <p>II) <math>9,95444 \dots 48^{\circ} 0'</math><br/> <math>\quad - \quad 17,3 \dots \dots 40''</math><br/> <math>\quad - \quad 2,6 \dots \dots 6''</math><br/> <hr/> <math>9,95424 \dots 48^{\circ} 0' 46''</math></p>  |

**Повѣрка.**

Для повѣрки вычислимъ уголъ  $B$  по формулѣ  $\sin B = \frac{h}{c}$ . Имѣемъ

|                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><math>\sin B = \frac{1}{1,3454},</math><br/> <math>\lg \sin B = -\lg 1,3454;</math><br/> <math>\lg \sin B = 9,87115 - 10;</math><br/> <math>B = 48^{\circ} 0' 40''.</math></p> | <p><math>\lg 1,3454 = 0,12885;</math><br/> <math>-\lg 1,3454 = 10 - 0,12885</math><br/> <math>\quad \quad \quad - 10;</math><br/> <math>9,87107 \dots 48^{\circ} 0'</math><br/> <math>\quad \quad \quad 8 \dots \dots 40''</math><br/> <hr/> <math>9,87115 \dots 48^{\circ} 0' 40''</math></p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Итакъ, ошибка при вычисленіи угла  $B$  составила цѣлыхъ 6 секундъ; но она распадается на двѣ ошибки. Во I-хъ, углы точнѣе опредѣляются по тангенсамъ, чѣмъ по синусамъ (см. ч. II, гл. IV); во II-хъ, мы вычислили гипотенузу  $c$  лишь приближенно, съ точностью до одной тысячной метра.

### Примѣръ IV.

Опредѣлить высоту башни, если она видна подъ угломъ  $u = 30^\circ 40'$  съ мѣста наблюденія, находящагося въ  $10\frac{1}{2}$  саж. отъ основанія башни.

### Рѣшеніе.

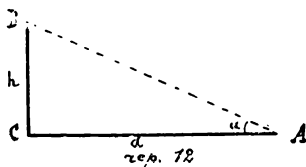
Называя черезъ  $h$  искомую высоту и черезъ  $d$  разстояніе въ  $10\frac{1}{2}$  саж. нетрудно видѣть, что вопросъ о нахожденіи  $h$  приводится къ вопросу о вычисленіи катета  $BC$  изъ  $\triangle ABC$  (чер. 12).

Имѣемъ

$$h = b \cdot \operatorname{tg} u,$$

$$h = 10,5 \operatorname{tg} 30^\circ 40',$$

$$\lg h = \lg 10,5 + \lg \operatorname{tg} 30^\circ 40'.$$



### Расположеніе вычисленій.

$$\left. \begin{array}{l} \lg h = \lg 10,5 + \lg \operatorname{tg} 30^\circ 40'; \\ \lg h = 0,79422; \\ h = 6,226 \text{ саж. (прибл.).} \end{array} \right| \begin{array}{r} + \lg 10,5 = 1,02119 \\ \lg \operatorname{tg} 30^\circ 40' = 9,77303 \\ \hline 0,79422 \end{array}$$

### Задачи для рѣшенія.

1. Опреѣлить радіусъ основанія прямого конуса, котораго образующая 32,4 мет., а уголь при вершинѣ  $32^\circ 17'$ .

2. Башня съ разстоянія 2,73 мет. видна подъ угломъ  $78^\circ 37' 35''$ . Найти высоту башни.

3. Акробатъ хочетъ по канату взойти на вершину башни въ 10,5 мет. вышины; онъ можетъ идти по канату только тогда, если наклонъ каната къ горизонту не болѣе  $30^\circ$ . Длина каната 19,6 метр.; можетъ ли акробатъ взойти на башню?

4. Солнце находится на высотѣ  $36^\circ 40'$  надъ горизонтомъ. Какой длины тѣнь отбрасываетъ вертикальный шестъ въ 20 фут.?

5. Найти высоту солнца надъ горизонтомъ, если длина тѣни человѣка вдвое больше его роста.

6. Подъ какимъ угломъ зрѣнія представится шаръ радіусомъ въ 36 см. наблюдателю, находящемуся на разстояніи 84 см. отъ центра шара?

7. Стекланный шаръ радіусомъ въ метръ видѣнъ изъ нѣкоторой точки  $A$  подъ угломъ въ  $70^\circ$ . Найти разстояніе отъ  $A$  до поверхности шара.

8. Желѣзная дорога идетъ въ гору и наклонъ ея  $75\%$ ; опредѣлить уголъ подъема.

9. Отъ станціи отходятъ товарный и пассажирскій поѣзда по взаимно перпендикулярнымъ направленіямъ. Черезъ часъ товарный поѣздъ находится на разстояніи 40 км. отъ пассажирскаго и видитъ его подъ угломъ  $66^\circ 52' 44''$ . Съ какой скоростью движутся поѣзда?

10. Пѣшеходъ и велосипедистъ направляются къ дереву на равнинѣ и прибываютъ туда одновременно, причемъ пути ихъ сходятся подъ прямымъ угломъ. Зная, что первоначальное разстояніе между ними составляло километръ и что скорость велосипедиста въ  $3\frac{1}{2}$  раза больше скорости пѣшехода, вычислить, сколько прошелъ каждый.

11. Воздушный шаръ видѣнъ изъ деревни подъ

угломъ въ  $78^\circ$  съ горизонтомъ, а изъ опушки лѣса, отстоящей на 3 км. отъ деревни, по вертикальному направленію. Определить высоту подъема шара.

12. Къ двумъ окружностямъ проведена общая виѣшняя касательная. Радіусъ одной окружности меньше другого на 10 мет. и составляетъ съ линіей центровъ уголъ въ  $100^\circ$ . Найти длину касательной.

13. Определить радіусъ шара, въ который можно вписать конусъ съ образующей 2,06 мет. и угломъ при вершинѣ  $118^\circ 17''$ , 2.

14. Скорость теченія рѣки  $1,65 \frac{\text{см.}}{\text{сек.}}$ ; лодкѣ сообщено движеніе со скоростью  $110,45 \frac{\text{см.}}{\text{сек.}}$ ; какъ надо направить лодку, чтобы она шла прямо поперекъ рѣки?

15. На скалѣ стоитъ башня въ 10 саж. вышины. Съ непріятельскаго лагеря ея вершина видна подъ угломъ  $2^\circ 20'$ . Найти высоту скалы, если лагерь отстоитъ отъ нея на 3 вер. 225 саж.

16. Вычислить скорость суточного вращенія Парижа, широта коего  $48^\circ 50' 11''$ , если извѣстно, что длина земного радіуса 6366 км.

17. Сколько километровъ пройдетъ Москва въ 8 ч. 45 м. при суточномъ вращеніи земли, если широта Москвы  $55^\circ 45'$ ?

18. Подъ какой широтой находится мѣсто, движущееся при суточномъ вращеніи земли вдвое медленнѣе Москвы?

19. Маякъ вышиною въ 30 мет. видѣнъ съ лодки подъ угломъ въ  $4^\circ 25' 49''$ . Зная, что лодка движется со скоростью  $60 \frac{\text{см.}}{\text{сек.}}$ , вычислить, черезъ сколько минутъ она достигнетъ маяка.

20. Въ равнобедренномъ треугольникѣ высота въ  $n$  разъ больше радіуса вписаннаго круга. Опредѣлите углы треугольника и вычислите ихъ при  $n=3$  и  $n=4$ .

---

## Глава VI. Тригонометрическія величины угловъ косоугольнаго треугольника.

28. **Опредѣленія.** Данныя нами раньше опредѣленія тригонометрическихъ величинъ относятся къ угламъ прямоугольнаго треугольника и потому содержатъ въ себѣ названія его сторонъ. Необходимо эти опредѣленія видоизмѣнить такъ, чтобы они относились къ угламъ любого треугольника; при этомъ сущность опредѣлений останется та же, а измѣнится только ихъ внѣшній видъ.

29. Условимся разсматривать три стороны прямоугольнаго треугольника такъ: гипотенузу будемъ называть наклонной, катеть, противолежащій углу, перпендикуляромъ, а прилежащій катеть—прозекціей наклонной. Тогда опредѣленія тригонометрическихъ величинъ примутъ слѣдующій видъ:

I. Отношеніе перпендикуляра къ наклонной есть синусъ;

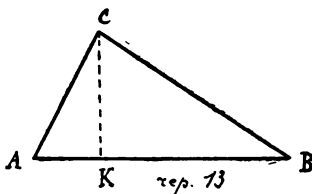
II. Отношеніе прозекціи къ наклонной есть косинусъ;

III. Отношеніе перпендикуляра къ прозекціи есть тангенсъ;

IV. Отношеніе прозекціи къ перпендикуляру есть котангенсъ.

30. Посмотримъ теперь, какъ найти тригонометрическія величины угловъ косоугольнаго треугольника, пользуясь новыми опредѣленіями.

Сначала рассмотрим треугольник  $ABC$ , въ которомъ всѣ три угла острые (чер. 13). Пусть стороны  $AC$  и  $BC$ —наклонныя, сторона  $AB$ —основаніе проэкцій. Чтобы найти тригонометрическія величины одного изъ угловъ при основаніи, напр.  $A$ , мы должны проэктировать сторону  $AC$  на  $AB$ ; получимъ перпендикуляръ  $CK$  и проэкцію  $AK$ ; тогда, согласно опредѣленіямъ, находимъ



$$\sin A = \frac{CK}{AC}, \cos A = \frac{AK}{AC}, \operatorname{tg} A = \frac{CK}{AK}, \operatorname{ctg} A = \frac{AK}{CK}.$$

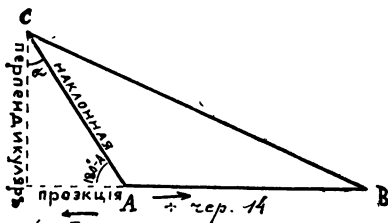
Подобнымъ же образомъ для угла  $B$  находимъ

$$\sin B = \frac{CK}{CB}, \cos B = \frac{KB}{CB}, \operatorname{tg} B = \frac{CK}{KB}, \operatorname{ctg} B = \frac{KB}{CK}.$$

Такимъ образомъ въ опредѣленія входятъ: одна изъ сторонъ угла, ея проэкція на другую сторону и противоположная углу высота.

**31. Правило Декарта.** — Возьмемъ теперь  $\triangle ABC$  (чер. 14), въ которомъ уголъ  $A$  при основаніи тупой.

Подобно предыдущему, проэктируемъ сторону  $AC$  на основаніе; при этомъ перпендикуляръ  $CK$  встрѣтитъ не само основаніе, а его продолженіе, слѣдовательно, проэкція  $AK$  въ данномъ случаѣ лежитъ на продолженіи стороны  $AB$  за тупой уголъ.



До сихъ поръ мы не принимали во вниманіе направленія отрѣзковъ.

Условимся теперь, согласно предложенію Декарта (1637), отрѣзки, отсчитываемые въ одномъ, заранѣе выбранномъ направленіи, считать положительными, а отрѣзки, отсчитываемые въ противоположномъ направленіи—отрицательными. Принявъ это условіе, мы будемъ впредь считать положительными направленія сторонъ угла, и отрицательными—ихъ продолженія за уголь. Тогда стороны  $AC$  и  $AB$  будутъ положительными; проеція  $AK$  — отрицательна. Что же касается перпендикуляра  $CK$ , то онъ какъ въ остромъ, такъ и въ тупомъ углѣ сохраняетъ тоже направленіе (сверху внизъ), слѣдовательно, знака не мѣняетъ.

Теперь, согласно опредѣленіямъ, находимъ

$$\sin A = \frac{CK}{AC}, \cos A = \frac{AK}{AC}, \operatorname{tg} A = \frac{CK}{AK}, \operatorname{ctg} A = \frac{AK}{CK}.$$

Согласно правилу Декарта, первое отношеніе положительно, а три остальныхъ—отрицательны. Итакъ, **синусъ тупого угла есть величина положительная, а косинусъ, тангенсъ и котангенсъ—величины отрицательныя.**

Во II-ой части книги мы увидимъ, что эти заключенія подтверждаются и аналитически.

**32. Избытокъ тупого угла.**—Такъ какъ уголь  $A$  тупой, то мы полагаемъ  $A = 90^\circ + \alpha$ , гдѣ  $\alpha$ —нѣкоторый острый уголь; назовемъ  $\alpha$  *избыткомъ тупого угла надъ прямымъ*. Зная, что  $A$ , какъ внѣшній уголь треугольника  $AKC$ , равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ, съ нимъ несмежныхъ, мы сейчасъ же находимъ

$$\alpha = \angle ACK.$$

Нетрудно установить зависимость между тригонометрическими величинами тупого угла и его избытка. Имѣемъ

$$\sin A = \frac{KC}{AC}, \quad \cos \alpha = \frac{KC}{AC};$$

эти отношенія равны по величинѣ и по знаку, слѣдовательно

$$\sin A = \cos \alpha.$$

Совершенно такъ же находимъ, что  $\cos A = \frac{AK}{AC}$  и  $\sin \alpha = \frac{AK}{AC}$ ; но въ треугольникѣ  $AKC$  сторона  $AK$  положительна, слѣдовательно, второе отношеніе имѣетъ знакъ, противоположный первому; поэтому

$$\cos A = -\sin \alpha.$$

Подобнымъ же образомъ находимъ

$$\operatorname{tg} A = -\operatorname{ctg} \alpha; \quad \operatorname{ctg} A = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Соединяя полученныя формулы вмѣстѣ и подставляя вмѣсто  $A$  его значеніе  $90^\circ + \alpha$ , получимъ

$$18) \quad \begin{aligned} \sin(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha, & \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha, \\ \cos(90^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha, & \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Эти формулы даютъ возможность свести вычисленіе тригонометрическихъ величинъ тупого угла къ вычисленію тригонометрическихъ величинъ угла острого, т. е. даютъ возможность пользоваться таблицами.

**33. Пополнительные углы.**—Условимся называть два угла, въ суммѣ дающіе  $180^\circ$ , взаимно-пополнитель-

ными углами; таковы, напр., смежные углы. Въ разсматриваемомъ нами случаѣ имѣемъ

$$A + \angle KAC = 180^\circ, \angle KAC = 180^\circ - A.$$

Далѣе  $\frac{KC}{AC} = \sin A$ ,  $\frac{KC}{AC} = \sin \angle KAC$ ; знаки обоихъ отношеній одинаковы, поэтому

$$\sin A = \sin \angle KAC.$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ, что косинусы, тангенсы и котангенсы взаимно-пополнительныхъ угловъ  $A$  и  $KAC$  равны по величинѣ, но противоположны по знакамъ. Итакъ

$$\begin{aligned} 19) \quad \sin A &= \sin (180^\circ - A), \quad \operatorname{tg} A = - \operatorname{tg} (180^\circ - A), \\ \cos A &= - \cos (180^\circ - A), \quad \operatorname{ctg} A = - \operatorname{ctg} (180^\circ - A). \end{aligned}$$

Послѣднія формулы даютъ второй способъ вычисления тригонометрическихъ величинъ тупого угла, при помощи дополнительнаго острого угла.

Выборъ—избытка или дополнительнаго угла—зависитъ всецѣло отъ насъ или отъ условій заданія.

**31. Тригонометрическія величины угла въ  $180^\circ$ .**—Пологая  $A = 180^\circ$ , при помощи формулъ (19), (6), (7) и § 22 непосредственно находимъ

$$\begin{aligned} 20) \quad \sin 180^\circ &= 0, \quad \cos 180^\circ = -1, \\ \operatorname{tg} 180^\circ &= 0, \quad \operatorname{ctg} 180^\circ = -\infty. \end{aligned}$$

### Примѣры.

I. Найдемъ тригонометрическія величины угловъ въ  $108^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $162^\circ$ .

| Уголъ | Sinus                    | Cosinus                 | Tangens                   | Cotangens             |       |
|-------|--------------------------|-------------------------|---------------------------|-----------------------|-------|
| 108°  | $\frac{10+2\sqrt{5}}{4}$ | $-\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ | $-\frac{3\sqrt{5}-5}{20}$ | $-(3\sqrt{5}+5)$      | 162°  |
| 120°  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$     | $-\frac{1}{2}$          | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$     | $-\sqrt{3}$           | 150°  |
| 135°  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$     | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$   | $-1$                      | $-1$                  | 135°  |
| 150°  | $\frac{1}{2}$            | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$   | $-\sqrt{3}$               | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 120°  |
|       | Cosinus                  | Sinus                   | Cotangens                 | Tangens               | Уголъ |

II. Покажемъ, что

$$\operatorname{tg} 100^{\circ} 20' 7'' = -\operatorname{ctg} 10^{\circ} 20' 7'' = -\operatorname{tg} 79^{\circ} 39' 53''.$$

Имѣемъ  $10^{\circ} 20' 7'' + 79^{\circ} 39' 53'' = 90^{\circ}$ , слѣдовательно, углы  $\alpha$  и  $180^{\circ} - A$  взаимно-дополнительные. Поэтому  $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} (180^{\circ} - A)$ ,  $\operatorname{ctg} 10^{\circ} 20' 7'' = \operatorname{tg} 79^{\circ} 39' 53''$ ;

зная же, что тангенсъ тупого угла величина отрицательная, мы сейчасъ получаемъ намѣченные равенства.

III. Предлагается учащимся показать:

1)  $\cos 148^{\circ} = -0,848$ ;  $\operatorname{tg} 132^{\circ} = -1,1106$ ;

$$\sin 170^{\circ} 20' = 0,9858.$$

2) Если  $A$  — тупой уголъ  $\triangle ABC$ , то  $\cos A + \cos (B + C) = 0$ .

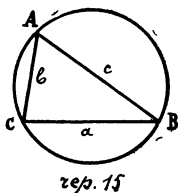
---

## Глава VII. Теоремы и формулы.

35. Для рѣшенія прямоугольнаго треугольника были даны формулы, содержащія лишь основные элементы треугольника—его стороны и углы. Подобныя же формулы для косоугольнаго треугольника непосредственно изъ опредѣленій тригонометрическихъ величинъ его угловъ получить нельзя, такъ какъ эти опредѣленія содержатъ въ себѣ добавочные элементы, а именно: высоту и проэкцію.

Въ настоящей главѣ выводятся теоремы и формулы, устанавливающія зависимость лишь между основными элементами косоугольнаго треугольника.

36. Теорема синусовъ.—Отношеніе стороны треугольника къ синусу противолежащаго угла есть величина постоянная, равная діаметру описаннаго круга.



Возьмемъ разносторонній треугольникъ  $ABC$  (чер. 15) и опишемъ около него окружность. Стороны  $a, b, c$  можно разсматривать какъ хорды, на которыя опираются вписанные углы  $A, B, C$ ; поэтому, на основаніи § 13, находимъ

$$\frac{a}{2R} = \sin A, \quad \frac{b}{2R} = \sin B, \quad \frac{c}{2R} = \sin C,$$

гдѣ  $R$ —радіусъ круга, описаннаго около треугольника  $ABC$ . Далѣе

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad \frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R;$$

соединяя всѣ три отношенія, окончательно получимъ

$$21) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Теорему синусовъ впервые установилъ Клавдій Птоломей.

**37. Слѣдствіа. I.**—Если въ предыдущей формулѣ отбросить послѣдній членъ, то получимъ такъ называемыя *формулы синусовъ*:

$$22) \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

Въ этомъ видѣ формулы примѣняются при рѣшеніи треугольниковъ.

II. Полагая  $c = 90^\circ$ , находимъ  $\sin C = 1$ ,  $B = 90^\circ - A$ ,  $\sin B = \cos A$ ; тогда первая формула (22) даетъ

$$a = b \operatorname{tg} A, \quad a = b \cdot \operatorname{ctg} B.$$

Вторая и третья формулы даютъ

$$a = c \cdot \sin A, \quad b = c \cdot \cos A.$$

Мы получили хорошо извѣстныя намъ формулы для рѣшенія прямоугольнаго треугольника.

**Примѣчаніе.** Теорема синусовъ была выведена нами для любыхъ угловъ треугольника, какъ острыхъ, такъ и тупыхъ.

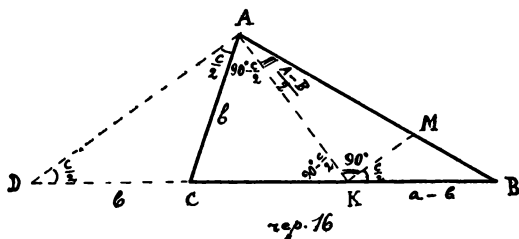
**38. Теорема тангенсовъ.** Пусть въ треугольникѣ даны стороны  $a$  и  $b$  и уголъ между ними  $C$ ; найдемъ зависимость между данными элементами и неизвѣстными углами  $A$  и  $B$ .

Положимъ, что въ треугольникѣ  $ABC$  (чер. 16) сторона  $a$  больше стороны  $b$ . Отложимъ на  $a$  отрѣзокъ  $СК$  и на продолженіи  $a$  отрѣзокъ  $CD$ , оба равныя  $b$ ; тогда

$$DB = a + b,$$

$$KB = a - b.$$

I. Разсмотримъ сначала вновь образовавшіеся углы.



1) Уголъ  $C$  внѣшній по отношенію къ равнобедренному треугольнику  $CAD$ , поэтому

$$\angle ADC = \angle DAC = \frac{C}{2}.$$

2) Соединивъ прямою точки  $A$  и  $K$ , получимъ равнобедренный треугольникъ  $CAK$ , въ которомъ сумма равныхъ угловъ при основаніи  $AK$  составляетъ  $180^\circ - C$ , слѣдовательно

$$\angle CAK = \angle CKA = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

3) Далѣе, уголъ  $DAK$  прямой (такъ какъ  $\angle DAK = \frac{C}{2} + (90^\circ - \frac{C}{2})$  — см. чертежъ)

$$\angle DAK = 90^\circ.$$

4) Проводимъ теперь  $KM$  параллельно  $DA$ . Углы  $MKB$  и  $ADC$  равны, какъ соотвѣтственные, углы  $MKA$  и  $DAK$  равны, какъ накрестъ-лежащіе, поэтому

$$\begin{aligned} \angle MKB &= \frac{C}{2}, \\ \angle MKA &= 90^\circ. \end{aligned}$$

5) Наконецъ,  $\angle BAK = A - \left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = A + \frac{C}{2} - 90^\circ$ ; но  $\frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2}$ , такъ что  $A + \frac{C}{2} - 90^\circ = A - \frac{A+B}{2}$  и окончательно

$$\angle BAK = \frac{A-B}{2}.$$

II. Треугольники  $ABD$  и  $MKB$ , какъ имѣющіе общій уголъ  $B$  и противолежащія ему стороны  $AD$  и  $MK$  параллельныя, подобны; поэтому

$$\frac{DB}{KB} = \frac{AD}{MK}$$

или

$$*) \frac{a+b}{a-b} = \frac{AD}{MK}.$$

Далѣе, изъ прямоугольнаго треугольника  $ADK$  имѣемъ

$$AD = AK \cdot \operatorname{tg} \angle AKD;$$

изъ прямоугольнаго треугольника  $AKM$  имѣемъ

$$MK = AK \cdot \operatorname{tg} \angle KAM.$$

Подставляя вмѣсто угловъ  $AKD$  и  $KAM$  ихъ значенія, получимъ

$$AD = AK \cdot \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{C}{2}\right),$$

$$MK = AK \cdot \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}.$$

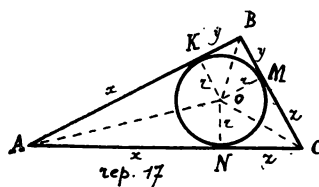
Затѣмъ

$$\frac{AD}{MK} = \frac{AK \cdot \operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{AK \cdot \operatorname{tg} \frac{A-B}{2}},$$

и окончательно, подставляя въ равенство (\*), послѣ сокращенія получимъ

$$23) \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}.$$

Это и есть теорема тангенсовъ. Впервые ее установилъ датскій ученый Томасъ Финкъ (1583).



### 39. Формулы Герона.

Пусть  $r$ —радіусъ круга, вписаннаго въ разносторонній треугольникъ  $ABC$  (чер. 17). Биссектриссы  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$  разбиваютъ данный треугольникъ на три, высоты коихъ равны  $r$ . Площадь  $F$  всего треугольника будетъ равна суммѣ площадей составляющихъ его треугольниковъ, т. е.

$$F = a \cdot \frac{r}{2} + b \cdot \frac{r}{2} + c \cdot \frac{r}{2}.$$

Вынося  $\frac{r}{2}$  за скобки и замѣчая, что  $a+b+c=2p$ , находимъ первую формулу Герона

$$24) \quad F = r \cdot p$$

Назовемъ отрѣзки касательныхъ, проведенныхъ изъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , соотвѣтственно черезъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; тогда

$$x + y = c,$$

$$x + z = b,$$

$$y + z = a.$$

Складывая почленно все три равенства, находимъ

$$x + y + z = p;$$

поэтому

$$\begin{aligned} 25) \quad x &= p - a, \\ y &= p - b, \\ z &= p - c. \end{aligned}$$

Наконецъ, Герону принадлежитъ третья важная формула, выводимая обыкновенно въ курсахъ Геометріи

$$26) \quad F = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

40. Формулы периметровъ. Изъ треугольника  $ANO$  (чер. 17) находимъ

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a}.$$

Далѣе, изъ (24) имѣемъ  $r = \frac{F}{p}$ . Подставляя вмѣсто  $F$  его выраженіе по (26), получимъ

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}, \\ \frac{r}{p-a} &= \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)}. \end{aligned}$$

Правую часть послѣдняго равенства легко упростить, вводя знаменателя подъ корень. Окончательно

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Подобнымъ же образомъ легко найти  $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$  и  $\operatorname{tg} \frac{C}{2}$ ; но еще проще составить искомыя формулы по

аналогіи съ  $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ , пользуясь методомъ круговой перестановки. Итакъ

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \\ 27) \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{C}{2} &= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}. \end{aligned}$$

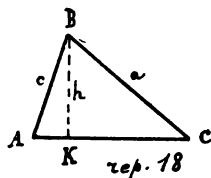
Формулы периметровъ даны впервые Рэтикусомъ (1568).

41. Формула Региомонтануса. (1463). Площадь треугольника равна половинѣ произведенія двухъ его сторонъ на синусъ угла между ними. Площадь треугольника  $ABC$  (чер. 18) выразится, напр., такъ

$$F = \frac{b \cdot h}{2}.$$

Но  $h = a \cdot \sin C$ , слѣдовательно

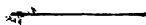
$$28) \quad F = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}.$$



Если  $C = 90^\circ$ , то  $\sin C = 1$  и мы получаемъ известную формулу

$$F = \frac{a \cdot b}{2},$$

гдѣ  $a$  и  $b$  — катеты.



## Глава VIII. Рѣшеніе косоугольныхъ треугольниковъ.

**42. Основные случаи.** Косоугольный треугольникъ исполнѣ опредѣленъ, если извѣстны три изъ его основныхъ элементовъ, въ томъ числѣ и одна изъ сторонъ. При этомъ заданныя величины должны удовлетворять слѣдующимъ условіямъ: 1) сумма двухъ угловъ должна быть меньше  $180^\circ$ ; 2) сумма двухъ сторонъ должна быть больше третьей стороны; 3) стороны должны быть выражены въ числахъ одинаковыхъ наименованій.

Основными заданіями являются четыре слѣдующихъ:

- I. Сторона и два угла,
- II. Двѣ стороны и уголъ между ними,
- III. Три стороны,
- IV. Двѣ стороны и уголъ, противолежащій одной изъ нихъ.

Первый случай рѣшается при помощи формулъ синусовъ, второй—при помощи формулы тангенсовъ, третій—при помощи формулъ периметровъ, четвертый—такъ называемый *сомнительный*—при помощи формулъ синусовъ.

### Примѣръ I.

Дано:  $b = 16343,91$  саж.,  $A = 29^\circ 54' 30'',69$  и  $C = 39^\circ 20' 33'',82$ . Рѣшить треугольникъ.

### Рѣшеніе.

Сначала находимъ третій уголъ  $B$ , а именно  $B = 110^\circ 44' 55'',49$ .

Далѣе

$$1) \quad a = \frac{b \sin A}{\sin B},$$

$$2) \quad c = \frac{b \cdot \sin C}{\sin B},$$

$$3) \quad F = \frac{ab \cdot \sin C}{2}.$$

### Расположеніе вычисленій.

$$I) \quad a = \frac{16343,91 \cdot \sin 29^\circ 54' 30'',69}{\sin 110^\circ 44' 55'',49},$$

$$\lg a = 3,94025;$$

$$a = 8714,6 \text{ саж.}$$

$$II) \quad c = \frac{16343,91 \cdot \sin 39^\circ 20' 33'',82}{\cos 20^\circ 44' 55'',49},$$

$$\lg c = 4,04455;$$

$$c = 11080,26 \text{ саж.}$$

$$III) \quad F = \frac{ab \sin C}{2}, \lg F = \lg a + \lg b + \lg \sin C - \lg 2$$

$$\lg F = 7,65464;$$

$$F = 45148000 \text{ кв. саж.}$$

$$I) \quad \alpha = 20^\circ 44' 55'',49$$

$$+ \lg a = 4,21336$$

$$+ \lg \sin A = 9,69776 - 10$$

$$\underline{13,91112 - 10}$$

$$- \lg \cos \alpha = 9,97087 \pm 10$$

$$\underline{3,94025}$$

$$II) \quad \lg b = 4,21336$$

$$- \lg \cos \alpha = 9,97087 \pm 10$$

$$\underline{4,24249}$$

$$+ \lg \sin C = 9,80206 - 10$$

$$\underline{4,04455}$$

$$III) \quad \lg a = 3,94025$$

$$+ \lg b = 4,21336$$

$$+ \lg \sin C = 9,80206 - 10$$

$$\underline{7,95567}$$

$$- \lg 2 = 0,30103$$

$$\underline{7,65464}$$

### Примѣръ II.

Даны стороны:  $a = 12,85$  саж. и  $c = 7,9695$  саж.,  
и уголъ  $B = 92^\circ 4' 58''$ . Рѣшить треугольникъ.

### Рѣшеніе.

Сначала вычислимъ углы  $A$  и  $C$ ; для этого найдемъ ихъ полуразность, пользуясь формулою тангенсовъ. Имѣемъ, такъ какъ  $a > c$ ,

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-C}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{A-C}{2} = \frac{(a-c) \operatorname{ctg} \frac{B}{2}}{a+c}.$$

Подставляя данныя величины, находимъ

$$I) \operatorname{tg} \frac{A-C}{2} = \frac{4,8805 \operatorname{ctg} 46^{\circ} 2' 29''}{20,8195}.$$

|                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $I) \lg \operatorname{tg} \frac{A-C}{2} = \lg 4,8805 + \lg \operatorname{ctg} 46^{\circ} 2' 29'' - \lg 20,8195;$ $\lg \operatorname{tg} \frac{A-C}{2} = 9,35421 - 10;$ $\frac{A-C}{2} = 12^{\circ} 44' 16'', 3.$ | $I) \lg 4,8805 = 0,68847$ $+ \lg \operatorname{ctg} 46^{\circ} 2' 29'' = 9,98421 - 10$ $= 10,67268 - 10$ $- \lg 20,8195 = 1,31847$ $= 9,35421 - 10$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 5px 0;"/> $9,35405 \quad \dots 12^{\circ} 44'$ $9.8 \quad \dots 10''$ $5.9 \quad \dots 6''$ $0.295 \quad \dots 0'', 3$ <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 5px 0;"/> $9,3540995 \quad \dots 12^{\circ} 44' 16'', 3$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Мы нашли полуразность искомыхъ угловъ; полу-  
сумму намъ легко найти изъ условія  $A + C = 180^{\circ} - B$ ,  
откуда  $\frac{A+C}{2} = 90^{\circ} - \frac{B}{2} = 43^{\circ} 57' 31''$ . Такимъ обра-  
зомъ мы получили систему двухъ уравненій съ двумя  
неизвѣстными

$$\left. \begin{aligned} \frac{A+C}{2} &= 43^{\circ} 57' 31'', \\ \frac{A-C}{2} &= 12^{\circ} 44' 16'', 3. \end{aligned} \right\}$$

Складывая и вычитая почленно, находимъ

$$A = 56^{\circ} 41' 47'', 3; \quad C = 31^{\circ} 13' 14'', 7.$$

Зная углы, мы можемъ найти третью сторону  $b$   
и площадь  $F$ :

$$2) \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A},$$

$$3) \quad F = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2}.$$

|                                                                                                                          |                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $2) \lg b = \lg a + \lg \sin B -$ $\quad \quad \quad - \lg \sin A;$ $\lg b = 1,18652,$ $b = 15,3647 \text{ саж.}$        | $2) \lg a = 1,10890$ $+ \lg \sin B = 9,99971 - 10$ $\quad \quad \quad \underline{11,10861} - 10$ $- \lg \sin A = 9,92209 - 10$ $\quad \quad \quad \underline{1,18652}$ |
| $3) \lg F = \lg a + \lg c + \lg \sin B -$ $\quad \quad \quad - \lg 2;$ $\lg F = 1,70901,$ $F = 51,1689 \text{ кв. саж.}$ | $3) \lg a = 1,10890$ $\lg \sin B = 9,99971 - 10$ $\lg c = 0,90143$ $\quad \quad \quad \underline{2,01004}$ $- \lg 2 = 0,30103$ $\quad \quad \quad \underline{1,70901}$ |

### Примѣръ III.

Рѣшить треугольникъ, стороны котораго 42 метра, 38 метровъ и 26 метровъ.

### Рѣшеніе.

Всѣ три угла треугольника опредѣляются по формуламъ периметровъ. Прежде всего найдемъ выраженія  $p$ ,  $p - a$ ,  $p - b$ ,  $p - c$  и ихъ логарифмы.

Имѣемъ, полагая  $a = 42$  м.,  $b = 38$  м.,  $c = 26$  м.

$$p = 53, \quad p - a = 11, \quad p - b = 15, \quad p - c = 27;$$

$$\lg p = 1,72428; \quad \lg (p - a) = 1,04139; \quad \lg (p - b) =$$

$$= 1,17609; \quad \lg (p - c) = 1,43136.$$

Расположение вычислений.

$$1) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \{ [\lg(p-b) + \lg(p-c)] - [\lg p + \lg(p-a)] \},$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 9,92089 - 10,$$

$$\frac{A}{2} = 39^{\circ} 48' 37'',$$

$$2) \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{1}{2} \{ [\lg(p-a) + \lg(p-c)] - [\lg p + \lg(p-b)] \},$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{B}{2} = 9,78619 - 10,$$

$$\frac{B}{2} = 31^{\circ} 26' 2'', 1.$$

$$3) \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \{ [\lg(p-a) + \lg(p-b)] - [\lg p + \lg(p-c)] \},$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{C}{2} = 9,53092 - 10,$$

$$\frac{C}{2} = 18^{\circ} 45' 20''.$$

Итакъ, ошибка для всѣхъ трехъ угловъ составила всего 0'',9.

$$1) \lg p = 1,72428$$

$$+ \lg(p-a) = 1,04139$$

$$\hline 2,76567$$

$$\lg(p-b) = 1,17609$$

$$+ \lg(p-c) = 1,43136$$

$$\hline 2,60745$$

$$- 2,76567$$

$$\hline (9,84178 - 10) : 2 =$$

$$= 9,92089 - 10$$

$$2) \lg p = 1,72428$$

$$\lg(p-b) = 1,17609$$

$$\hline 2,90037$$

$$\lg(p-a) = 1,04139$$

$$\lg(p-c) = 1,43136$$

$$\hline 2,47275$$

$$- 2,90037$$

$$\hline (9,57238 - 10) : 2 =$$

$$= 9,78619 - 10$$

$$3) \lg p = 1,72428$$

$$\lg(p-c) = 1,43136$$

$$\hline 3,15564$$

$$\lg(p-a) = 1,04139$$

$$\lg(p-b) = 1,17609$$

$$\hline 2,21748$$

$$- 3,15564$$

$$\hline (9,06184 - 10) : 2 =$$

$$= 9,53092 - 10$$

П о в ѣ р к а :

$$\frac{A}{2} = 39^{\circ} 48' 37''$$

$$\frac{B}{2} = 31^{\circ} 26' 2'', 1$$

$$\frac{C}{2} = 18^{\circ} 45' 20''$$

$$\hline 89^{\circ} 59' 59'', 1$$

|                                           |            |                       |
|-------------------------------------------|------------|-----------------------|
| 4) $F = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ,        | 4) $\lg p$ | $= 1,72428$           |
| $\lg F = \frac{1}{2} [\lg p + \lg(p-a) +$ | $\lg(p-a)$ | $= 1,04139$           |
| $+ \lg(p-b) + \lg(p-c)]$ ,                | $\lg(p-b)$ | $= 1,17609$           |
| $\lg F = 2,68656$ ,                       | $\lg(p-c)$ | $= 1,43136$           |
| $F = 485,91$ кв. м.                       |            | $\frac{5,37312}{2} =$ |
|                                           |            | $= 2,68656$           |

Итакъ, окончательно имѣемъ

$$\begin{aligned} A &= 79^{\circ} 37' 14'', \\ B &= 62^{\circ} 52' 4'', 2, \\ C &= 37^{\circ} 30' 40'', \\ F &= 485,91 \text{ кв. м.} \end{aligned}$$

#### Примѣръ IV.

Даны стороны  $a$  и  $b$  и уголъ  $A$ ; рѣшить треугольникъ.

Рѣшеніе.

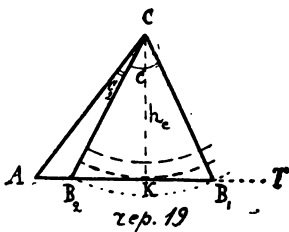
По теоремѣ синусовъ находимъ уголъ  $B$  и сторону  $c$

$$\begin{aligned} 1) \quad \sin B &= \frac{b \cdot \sin A}{a}, \\ 2) \quad C &= 180^{\circ} - (A + B), \\ 3) \quad c &= \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}, \\ 4) \quad F &= \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}. \end{aligned}$$

#### Изслѣдованіе.

43. Три предыдущихъ заданія допускали только одно геометрическое построеніе; въ настоящемъ же случаѣ построений можетъ быть два, одно или ни

одного. Дѣйствительно, пусть прямая  $AT$  (чер. 19) представляетъ направление стороны  $c$ . Выбравъ на ней произвольную точку  $A$ , какъ одну изъ вершинъ треугольника, строимъ уголъ  $A$ , равный данному, и откладываемъ на другой сторонѣ отрезокъ  $AC$ , равный  $b$ .



Далѣе, изъ точки  $C$ , второй вершины треугольника, опустимъ перпендикуляръ на  $AT$  и назовемъ его черезъ  $h_c$ .

Наконецъ, радиусомъ, равнымъ  $a$ , опишемъ дугу изъ центра  $C$  и найдемъ точки пересѣченія ея съ прямою  $AT$ . Здѣсь возможны три случая.

I) Если  $a > h_c$ , то точекъ пересѣченія дуги съ прямою  $AT$  двѣ:  $B_1$  и  $B_2$ , т.-е. существуютъ два треугольника,  $ACB_1$  и  $ACB_2$ , удовлетворяющихъ заданію; одинъ изъ нихъ остроугольный, другой тупоугольный.

II) Если  $a = h_c$ , то точка  $K$  есть точка касанія и треугольникъ одинъ: это прямоугольный треугольникъ  $ACK$ .

III) Если  $a < h_c$ , то дуга не имѣетъ общихъ точекъ съ прямою  $AT$ , и треугольникъ невозможенъ.

**Примѣчаніе.** При построеніи предполагалось, что уголъ  $A$  острый; если  $A$  — тупой, то два рѣшенія, очевидно, невозможны.

44. Изслѣдуемъ теперь вопросъ аналитически; при этомъ исключаемъ предположенія:  $A = 90^\circ$  и  $a = b$ , какъ приводящія къ прямоугольному и равнобедренному треугольникамъ.

Прежде всего замѣчаемъ, что изъ прямоугольнаго треугольника  $АСК$  слѣдуетъ:  $h_c = b \cdot \sin A$ ; мы же имѣемъ формулу

$$\sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}.$$

Здѣсь числитель дроби равенъ  $h_c$ , а знаменатель равенъ  $a$ ; поэтому величина угла  $B$  зависитъ отъ величинъ  $h_c$  и  $a$ , что мы имѣли и раньше.

Разсмотримъ данную дробь, полагая  $a < b$ .

I) Если числитель дроби больше знаменателя, то дробь больше 1 и  $\sin B > 1$ , что, очевидно, невозможно. Предположеніе это влечетъ за собою допущеніе неравенства

$$I) \quad a < b \sin A.$$

II) Если числитель равенъ знаменателю, то дробь равна 1 и  $\sin B = 1$ , т.-е.  $B = 90^\circ$ ; это равнозначно допущенію

$$II) \quad a = b \cdot \sin A.$$

Въ этомъ случаѣ возможно одно рѣшеніе, и треугольникъ — прямоугольный.

III) Если числитель меньше знаменателя, то дробь меньше 1 и  $\sin B < 1$ ; а такъ какъ  $\sin B = \sin(180^\circ - B)$ , то можно предполагать, что уголъ  $B$  или острый, или тупой. Итакъ, если имѣетъ мѣсто неравенство

$$III) \quad a > b \cdot \sin A,$$

то возможны два рѣшенія.

Мы видимъ, что результаты построенія и изслѣдованія совпали.

IV) Если  $a > b$ , то, очевидно, и  $A > B$ ; въ этомъ случаѣ о двухъ рѣшеніяхъ не можетъ быть и рѣчи. Наконецъ, если  $A$ —тупой уголъ, то  $B$  непременно долженъ быть острымъ, что ясно помимо всякаго изслѣдованія.

45. Таблица.—Для наглядности всѣ выводы соединимъ въ одной таблицѣ.

|                |   |                                                   |                   |
|----------------|---|---------------------------------------------------|-------------------|
| $A < 90^\circ$ | { | $a < b$ ; при условіи $a > b \cdot \sin A$ имѣемъ | 2 рѣшенія;        |
|                |   | $a < b$ ; » » $a = b \cdot \sin A$ имѣемъ         | 1 рѣшеніе;        |
|                |   | $a < b$ ; » » $a < b \cdot \sin A$ имѣемъ         | 0 рѣшеній;        |
|                |   | $a > b$ , всегда возможно                         | 1 рѣшеніе;        |
| $A > 90^\circ$ | { | $a > b$ , » »                                     | 1 рѣшеніе;        |
|                |   | $a < b$ ,                                         | имѣемъ 0 рѣшеній. |

### Численный примѣръ.

Даны:  $a = 3,4$  саж.,  $b = 4,5$  саж.,  $A = 36^\circ 27' 20''$ .  
Рѣшить треугольникъ.

### Рѣшеніе и вычисленіе.

Прежде всего замѣчаемъ, что  $a < b$  и  $A < 90^\circ$ .  
Далѣе  $A < 45^\circ$ ,  $\sin A < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , а  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  приблизительно равенъ 0,7; поэтому  $b \cdot \sin A < 4,5 \cdot 0,7 = 3,15$ , т. е.  $a > b \cdot \sin A$ . Мы заключаемъ, что въ данномъ случаѣ возможны два рѣшенія.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>I) <math>\lg \sin B = \lg b + \lg \sin A - \lg a</math>;<br/> <math>\lg \sin B = 9,89566 - 10</math>;<br/> <math>B_1 = 51^\circ 51' 12''</math>,<br/> <math>B_2 = 128^\circ 8' 48''</math>.</p> <p>II) Соответственно этому по-<br/> лучимъ<br/> <math>C_1 = 91^\circ 41' 28''</math>,<br/> <math>C_2 = 15^\circ 23' 52''</math>.</p> | <p>I) <math>\lg b = 0,65321</math><br/> <math>+ \lg \sin A = 9,77393 - 10</math><br/> <math>\frac{10,42714 - 10}{- \lg \sin a = 0,53148}</math><br/> <math>\frac{9,89566 - 10}{-}</math></p> <p>II) <math>\frac{180^\circ}{51^\circ 51' 12''} + \frac{36^\circ 27' 20''}{51^\circ 51' 12''}</math><br/> <math>\frac{128^\circ 8' 48''}{88^\circ 18' 32''}</math><br/> <math>\frac{180^\circ}{88^\circ 18' 32''} + \frac{36^\circ 27' 20''}{128^\circ 8' 48''}</math><br/> <math>\frac{91^\circ 41' 28''}{161^\circ 36' 8''}</math><br/> <math>\frac{180^\circ}{164^\circ 36' 8''}</math><br/> <math>\frac{13^\circ 23' 52''}{-}</math></p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Остается найти  $c$  и  $F$ ; очевидно, что для нихъ  
получаются тоже по два значенія.

**Первое рѣшеніе.**

5)  $\lg c_1 = \lg a + \lg \sin C_1 -$   
 $\quad \quad \quad - \lg \sin A$ ;  
 $\lg c_1 = 0,53148 +$   
 $+ (9,99981 - 10) - (9,77393 - 10)$ ;  
 $\lg c_1 = 0,75736$ ;  
 $c_1 = 5,7195$  сант.

4)  $\lg F_1 = \lg a + \lg b +$   
 $\quad \quad \quad + \lg \sin C_1 - \lg 2$ ;  
 $\lg F_1 = 0,53148 + 0,65321 +$   
 $+ (9,99981 - 10) - 0,30103$ ;  
 $\lg F_1 = 0,83347$ ;  
 $F_1 = 7,64637$  кв. сант.

**Второе рѣшеніе.**

3)  $\lg c_2 = \lg a + \lg \sin C_2 -$   
 $\quad \quad \quad - \lg \sin A$ ;  
 $\lg c_2 = 0,53148 +$   
 $(9,42410 - 10) - (9,77393 - 10)$ ;  
 $\lg c_2 = 0,18165$ ;  
 $c_2 = 1,51932$  сант.

4)  $\lg F_2 = \lg a + \lg b +$   
 $\quad \quad \quad + \lg \sin C_2 - \lg 2$ ;  
 $\lg F_2 = 0,53148 + 0,65321 +$   
 $+ (9,42480 - 10) - 0,30103$ ;  
 $\lg F_2 = 0,30776$ ;  
 $F_2 = 2,03124$  кв. сант.

### З а д а ч и.

. Рѣшить треугольникъ по сторонѣ и 2 угламъ:

- 1)  $b = 87,811$ ;  $A = 40^\circ 56' 7''$ ;  $B = 54^\circ 16''$ , 9.
- 2)  $c = 0,1$ ;  $B = 70^\circ 43' 6''$ ;  $C = 49^\circ 7' 4''$ , 5.
- 3)  $a = 2$ ;  $B = 140^\circ 57' 16''$ ;  $C = 19^\circ 4' 5''$ , 9.
- 4)  $c = 64,005$ ;  $A = 102^\circ 56''$ ;  $B = 7^\circ 35' 2''$ , 84.

II. Рѣшить треугольникъ по 2 сторонамъ и углу между ними:

- 5)  $a = 1,85$ ;  $c = 2,6$ ;  $B = 43^\circ 56' 38''$ .
- 6)  $b = 0,66$ ;  $c = 0,47569$ ;  $A = 19^\circ 31' 42''$ , 17.
- 7)  $a = 23,56$ ;  $b = 47,59$ ;  $C = 103^\circ 18' 0''$ , 54.
- 8)  $b = 0,06756$ ;  $c = 8,96$ ;  $A = 67^\circ 18' 17''$ , 3.

III. Рѣшить треугольникъ по тремъ сторонамъ:

- 9)  $a = 450$ ;  $b = 300$ ;  $c = 310$ ;
- 10)  $a = 3,472$ ;  $b = 2,8$ ;  $c = 3,084$ .
- 11)  $a = 356,5$ ;  $b = 275,8$ ;  $c = 111,6$ .
- 12)  $a = 51,69$ ;  $b = 2,57$ ;  $c = 50,17$ .

IV. Рѣшить треугольникъ по 2 сторонамъ и углу, противолежащему одной изъ нихъ:

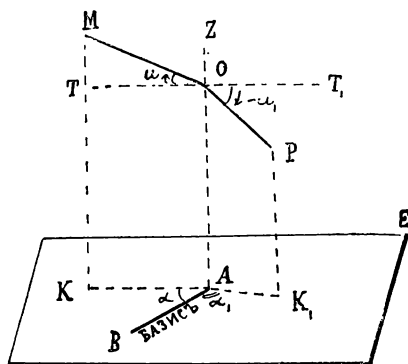
- 13)  $b = 486$ ;  $c = 812$ ;  $B = 21^\circ 35' 48''$ , 4.
- 14)  $a = 13,5$ ;  $c = 8,062$ ;  $A = 58^\circ 42' 16''$ , 8.
- 15)  $c = 40,658$ ;  $b = 57$ ;  $C = 45^\circ 48' 30''$ , 6.
- 16)  $a = 0,28$ ;  $c = 1,35$ ;  $A = 16^\circ 18' 17''$ .
- 17)  $a = 0,131$ ;  $b = 0,1$ ;  $A = 80^\circ 22' 7''$ , 59.
- 18)  $a = 134,7$ ;  $c = 157,15$ ;  $A = 132^\circ 9' 4''$ , 6.

---

## Глава IX. Приложение тригонометріи къ геодезіи.

46. **Задача Геодезіи.** Задача Геодезіи вообще — опредѣлить видъ земной поверхности; въ частности,

же низшая геодезія или топографія занимается составленіемъ плановъ отдѣльныхъ мѣстностей, опредѣленіемъ высотъ различныхъ предметовъ и зданій, вычисленіемъ разстояній между пунктами на землѣ и т. п. Всѣ эти вопросы приводятъ къ триангуляціи, т. е. къ рѣшенію ряда треугольниковъ, связанныхъ другъ съ другомъ и составляющихъ триангуляціонную или тригонометрическую сѣть.



чер. 20

**47. Опредѣленіе положенія точки въ пространствѣ.** Для опредѣленія положенія точки въ пространствѣ необходима нѣкоторая опредѣленная система координатъ, хотя выборъ ея зависитъ отъ насъ. Здѣсь мы вкратцѣ рассмотримъ слѣдующую систему,

наиболѣе употребительную въ геодезіи.

Дана плоскость горизонта *HE* (чер. 20) и на ней выбрана произвольная (по направленію) прямая линія *BA*, но вполне опредѣленной длины; назовемъ ее „Базисъ“ и обозначимъ черезъ „*d*“—начальная буква слова „distance“ (разстояніе). Изъ конца *A* базиса проведемъ вертикальную линію *AZ*; пусть точка *O* на ней обозначаетъ положеніе глаза наблюдателя, стоящаго на плоскости въ *A*. Возьмемъ теперь нѣкоторую точку *M* въ пространствѣ, лежащую выше *O*. Прямая *OM* или лучъ зрѣнія составитъ съ плоскостью

горизонта точки  $O$  нѣкоторый уголъ  $ТОМ = u$ ; назовемъ его: «угловая высота» точки  $M$ . Но этимъ рѣшеніе вопроса не исчерпано: угловая высота « $u$ » опредѣляетъ безчисленное множество точекъ, лежащихъ на окружности основанія прямого конуса, полученнаго отъ вращенія  $ОМ$  около  $OZ$  (вѣрнѣе, не конуса, а конической поверхности). Чтобы изъ этихъ точекъ выбрать  $M$ , нужно ввести еще одну данную. Для этого проведемъ черезъ  $МО$  вертикальную плоскость, и пусть она пересѣчетъ  $НЕ$  по прямой  $AK$ ; полученный двугранный уголъ  $МОАВ$  измѣряется линейнымъ угломъ  $ВАК$ . Этотъ послѣдній мы обозначимъ черезъ « $\alpha$ » и назовемъ «азимуть» точки  $M$ . Теперь, зная  $d$ ,  $u$ ,  $\alpha$ , а также положеніе  $O$  глаза наблюдателя, мы можемъ опредѣлить и положеніе точки  $M$  въ пространствѣ.

48. Я предполагалъ, что точка  $M$  находится выше  $O$ . Если же  $M$  расположена ниже, то лучъ зрѣнія пойдетъ внизъ и уголъ « $u$ » придется отсчитывать въ обратномъ направленіи. Напримѣръ, для точки  $P$  имѣемъ:  $u_1 = \angle T'OP$ ,  $\alpha_1 = \angle ВАК'$ .—Чтобы знать сразу же объ относительномъ положеніи точки  $P$ , говорятъ, что уголъ « $u_1$ » есть «угловое пониженіе» точки  $P$  или что точка  $P$  имѣетъ отрицательную угловую высоту.

49. Замѣтимъ еще, что часто рассматриваютъ уголъ, составленный лучемъ зрѣнія съ вертикалью  $AZ$ ; его обозначаютъ черезъ « $z$ » и называютъ: «зенитное разстояніе» точки. Такъ, для  $M$  зенитное разстояніе есть уголъ острый:  $z = \angle ZOM$ ; наоборотъ, для  $P$  — зенитное разстояніе тупой уголъ:  $z_1 = \angle ZOP$ . Вообще же

$$z \pm u = 90^\circ,$$

гдѣ знакъ при  $u$  берется въ зависимости отъ положенія разсматриваемой точки.

50. При измѣреніи  $d$ ,  $u$ ,  $\alpha$  пользуются различными приѣмами и приборами. Не вдаваясь въ подробное описаніе, что относится къ спеціальному курсу геодезіи, замѣчу лишь слѣдующее.

Базисъ измѣряется при помощи такъ называемыхъ *базисныхъ приборовъ*: они состоятъ изъ ряда соединенныхъ между собою мѣрныхъ металлическихъ жезловъ съ различными детальными приспособленіями. Таковы приборы Струве, Бесселя и др. При менѣе точныхъ вычисленіяхъ измѣряютъ базисъ по шнуру (способъ Струве) или проволоками (способъ Эдерина). Накопецъ при простыхъ съемкахъ употребляютъ вѣхи и мѣрительную ленту.

Измѣреніе угловъ производится при помощи буссоли, астролябіи или мензулы. Для опредѣленія горизонтальныхъ и вертикальныхъ направленій служатъ: нивелиръ—теодолитъ, ватерпасъ и эккеръ.

51. **Главные типы задачъ.** Перейдемъ теперь къ рѣшенію главныхъ практическихъ задачъ на мѣстности.

**ЗАДАЧА I.** Опредѣлить высоту доступнаго предмета, стоящаго на горизонтальной плоскости.

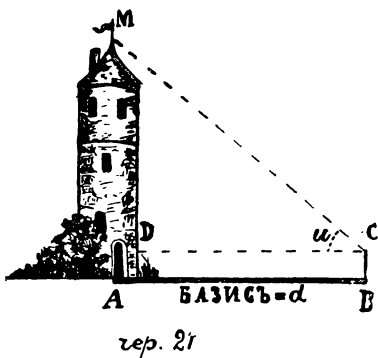
Пусть  $AM = x$  искомая высота предмета. Такъ какъ онъ доступенъ, то мы можемъ выбрать точку  $A$  за начало базиса (чер. 21). Въ другомъ концѣ его,  $B$ , помѣщаемъ угломѣрный приборъ, высота косо  $BC = h$ ; тогда угловая высота точки  $M$  представится

угломъ  $DCM = u$ .  
Изъ прямоугольнаго  
треугольника  $MCD$   
находимъ

$$DM = CD \cdot \operatorname{tg} u.$$

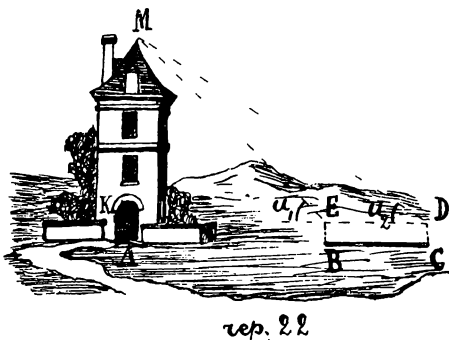
Такъ какъ  $CD =$   
 $BA = d$  и  $x = DM +$   
 $AD$  т. е.  $x = DM$   
 $+ h$ , то

$$1) \quad x = d \cdot \operatorname{tg} u + h.$$



**ЗАДАЧА II.** Опредѣлять высоту недоступнаго предмета,  
котораго основаніе находится въ одной горизонтальной  
плоскости съ мѣстомъ наблюдателя.

Пусть по пре-  
жнему  $AM = x$   
представляетъ  
высоту недо-  
ступнаго пред-  
мета (чер. 22).  
Выбираемъ двѣ  
точки  $B$  и  $C$ ,  
лежащія на од-  
ной прямой ли-



нии съ  $A$ —основаніемъ предмета—и въ одной съ нимъ  
плоскости. Разстояніе между  $B$  и  $C$  измѣряемъ и  
принимаетъ за базисъ. Затѣмъ, поставивъ угломер-  
ные приборы, высота коихъ  $h$ , въ точкахъ  $B$  и  $C$ ,  
найдемъ двѣ угловыя высоты точки  $M$ :  $u_1 = \angle KEM$

и  $u_2 = \angle KDM$ . Теперь вопросъ свелся къ вычисленію  $KM$ , такъ какъ  $x = KM + h$ . Мы имѣемъ два треугольника: прямоугольный  $KME$  и тупоугольный  $EMD$ ; въ первомъ извѣстенъ лишь уголъ  $u_1$ , за то во второмъ извѣстна сторона  $ED = d$  и всѣ 3 угла. Слѣдовательно, мы изъ второго треугольника можемъ опредѣлить  $EM$ , т. е. гипотенузу перваго. Имѣемъ

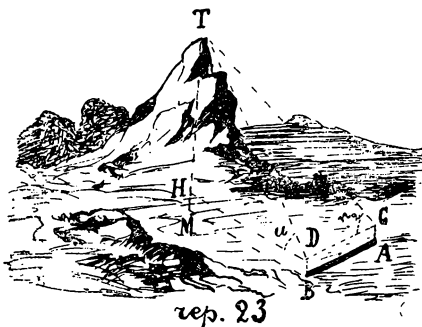
$$EM = \frac{d \cdot \sin u_2}{\sin (u_1 - u_2)},$$

$$KM = EM \cdot \sin u_1.$$

Итакъ, окончательно находимъ

$$\text{II)} \quad x = \frac{d \cdot \sin u_1 \cdot \sin u_2}{\sin (u_1 - u_2)} + h.$$

### ЗАДАЧА III. Опредѣлить высоту недоступной горы.



Пусть  $MT = x$  представляетъ истинную высоту (чер. 23). Выбираемъ двѣ точки  $A$  и  $B$  приблизительно въ одной горизонтальной плоскости съ основаніемъ  $M$  и раз-

стояніе между ними  $AB = d$  принимаемъ за базисъ. Въ точкахъ  $A$  и  $B$  помѣщаемъ угломерные инструменты, высота коихъ  $h$ , и измѣряемъ углы:  $\angle TDH = u$ ,  $\angle TDC = n_1$  и  $\angle TCD = n_2$ . Тогда изъ треугольника  $TDC$  находимъ

$$TD = \frac{d \cdot \sin n_2}{\sin (n_1 + n_2)},$$

а пзъ треугольника  $TDH$

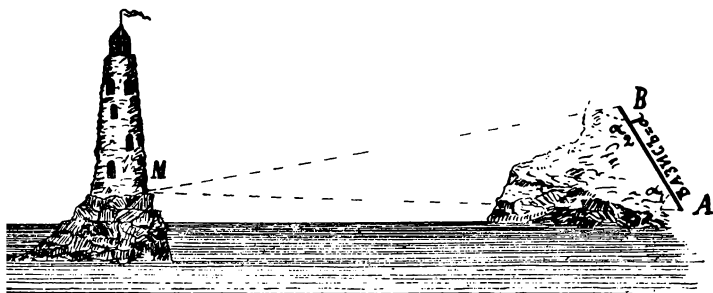
$$TH = TD \cdot \sin u.$$

Итакъ

$$\text{III)} \quad x = \frac{d \cdot \sin u \cdot \sin n_2}{(\sin n_1 + \sin n_2)} + h,$$

**ЗАДАЧА IV.** Определить разстояніе между двѣхъ точками изъ коихъ одна недоступна.

Положимъ что даны двѣ точки  $A$  и  $M$  (чер. 24), раздѣленные рѣкою (или инымъ препятствіемъ).



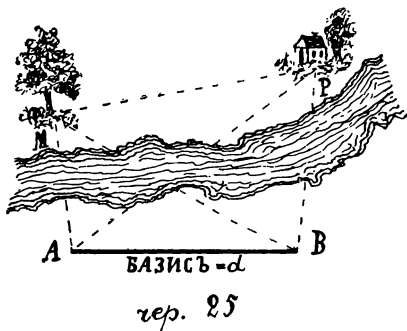
чер. 24

Искомое разстояніе  $AM = x$  можно тогда определить такъ. Выбираемъ третью точку  $B$ , лежащую вблизи отъ  $A$  по одну и ту же сторону рѣки. Въ вершинахъ полученнаго такимъ образомъ базиса  $AB = d$  ставимъ угломерные инструменты, высотой коихъ теперь можно пренебречь, и измѣряемъ азимуты:

$\alpha_1 = \angle MAB$  и  $\alpha_2 = \angle MBA$ . Затѣмъ изъ треугольника  $AMB$  по формулѣ синусовъ находимъ

$$IV) \quad x = \frac{d \cdot \sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}.$$

**ЗАДАЧА V. Опредѣлить разстояніе между двумя недоступными точками.**



Если двѣ точки  $M$  и  $P$  (чер. 25) отдѣлены отъ наблюдателя непроходимымъ препятствіемъ (напр. рѣкою, болотомъ, оврагомъ и т. п.), по видны съ мѣста наблюденія, то раз-

стояніе  $MP = x$  между ними опредѣлится такъ. Выбравъ базисъ  $AB = d$  и измѣривъ 4 азимута  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , рѣшаемъ треугольники. Имѣемъ

$$1) \quad AM = \frac{d \cdot \sin \alpha_3}{\sin (\alpha_1 + \alpha_3)},$$

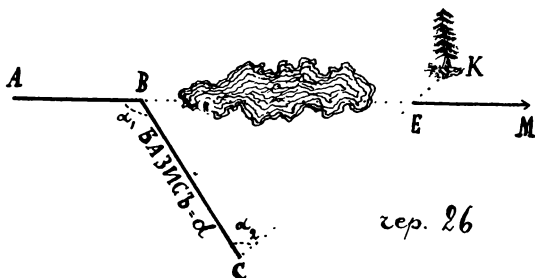
$$2) \quad AP = \frac{d \cdot \sin \alpha_4}{\sin (\alpha_2 + \alpha_4)},$$

$$3) \quad \angle MAP = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Эти три величины вполне опредѣляютъ треугольникъ  $AMP$ ; рѣшая его, найдемъ и искомое разстояніе  $MP$ .

# **ЗАДАЧА VI. Продолжить прямую черезъ препятствіе.**

Положимъ, что прямую  $AB$  (чер. 26) требуется продолжить черезъ препятствіе  $P$ . Выбираемъ такую точку  $C$ , изъ которой была бы видна мѣстность по



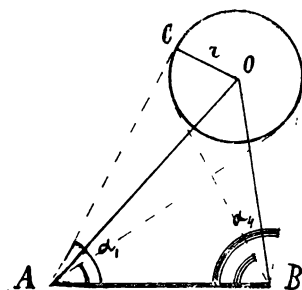
обѣ стороны препятствія; разстояніе  $BC = d$  принимаемъ за базисъ. Затѣмъ изъ точки  $C$  визируемъ какой нибудь выдающійся пунктъ по правую сторону препятствія, напр. дерево и наносимъ на планѣ направление  $CK$ ; тогда у насъ извѣстны углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Продолжимъ пунктиромъ направление  $AB$  до пересѣченія съ  $CK$  въ точкѣ  $E$ ; если мы найдемъ разстояніе  $CE$  и уголъ  $CEM$ , то задача будетъ рѣшена.

Изъ треугольника  $BCE$  по теоремѣ синусовъ находимъ

$$\frac{CE}{d} = \frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle BEC} \text{ или } CE = \frac{d \sin (180^\circ - \alpha_1)}{\sin (\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

Далѣе,  $\angle CEM = \angle CBE + \angle BCE = 180^\circ - \alpha_1 + \alpha_2$ . Построивъ  $\angle CEM$ , мы найдемъ искомое направление  $EM$ .

**ЗАДАЧА VII. Опредѣлить радіусъ основанія недоступнаго предмета.**



чер. 27

Пусть  $r$  — искомый радіусъ (чер. 27). Выбравъ базисъ  $AB = d$  такъ, чтобы изъ его вершинъ были видны края окружности, измѣряемъ углы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ; они составлены четырьмя касательными, проведенными изъ  $A$  и  $B$ , и базисомъ. Соединивъ за-

тѣмъ  $A$  и  $B$  съ  $O$ , получимъ  $\triangle AOB$ , въ которомъ  $\angle OAB = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$ ,  $\angle OBA = \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}$ ,  $\angle AOB = 180^\circ - \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2}$ . Изъ этого треугольника находимъ  $OA$

$$OA = \frac{d \cdot \sin \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}}{\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2}}.$$

Далѣе изъ прямоугольнаго треугольника  $ACO$  имѣемъ

$$OC = OA \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2},$$

что даетъ искомое выраженіе для радіуса  $r$

$$r = \frac{d \cdot \sin \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \sin \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}}{\sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{2}}.$$

### Задачи для рѣшенія.

1. Чтобы опредѣлить разстояніе непріятельскаго лагеря  $A$  отъ крѣпости  $K$ , измѣрили базисъ  $KC = 322,55$  саж. и углы  $AKC = 60^\circ 34'$  и  $ACK = 56^\circ 10'$ . Вычислить разстояніе  $AK$ .

2. Подъ какимъ угломъ зрѣнія представляется предметъ въ 1 саж. длины наблюдателю, глазъ котораго отстоитъ отъ одного конца на 5 фут., а отъ другого на 8 ф.

3. Три круга касаются извнѣ; радіусы ихъ 828,88 мет., 866,16 мет. и 898,8 мет. Опредѣлить углы, образуемые линіями центровъ.

4. Отъ узловой станціи  $A$  отходятъ два поѣзда, курьерскій и товарный; первый идетъ въ 6 разъ скорѣе второго; ихъ пути отъ станціи  $A$  расходятся подъ угломъ въ  $51^\circ 42' 4''$ . Подъ какимъ угломъ товарный поѣздъ будетъ видѣть черезъ часъ курьерскій?

5. Наблюдатель, находившійся на нѣкоторомъ разстояніи отъ башни, нашелъ, что ея угловая высота  $22^\circ 20'$ . Когда же наблюдатель придвинулся къ башнѣ на 162 фута, то угловая высота оказалась  $48^\circ 10'$ . Въ обоихъ случаяхъ глазъ наблюдателя отстоялъ отъ поверхности земли на 5,625 фут. Опредѣлить высоту башни.

6. Чтобы опредѣлить высоту  $SH$  недоступной башни, измѣряютъ въ одной горизонтальной плоскости съ ея основаніемъ  $H$  прямую  $AB = 500$  фут. (въ направленіи къ  $H$ ) и углы  $SAH = 12^\circ 10' 30''$  и  $SBH = 25^\circ 30'$ . Найти высоту башни.

7. Молнія, имѣющая видъ прямой линіи, была

видна изъ мѣста  $A$  подъ угломъ въ  $43^{\circ} 36' 10''$ ; черезъ 17 секундъ послѣдовалъ громъ, продолжавшійся  $2\frac{1}{2}$  секунды. Определить длину молніи, если скорость звука  $333 \frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$ .

8. Въ четырехугольникѣ  $ABCD$  уголъ  $A$  прямой, а стороны:  $AB=28$  мет.,  $BC=30$  мет.,  $CD=32$  мет.,  $DA=21$  мет. Найти углы.

9. Изъ концовъ прямой  $AB=283$  см. движутся равномерно по направленію къ внѣшней точкѣ  $C$  два тѣла со скоростями  $3,4 \frac{\text{см.}}{\text{сек.}}$  и  $2,3 \frac{\text{см.}}{\text{сек.}}$ . Черезъ 40 секундъ они пришли въ  $C$ . Подъ какими углами ихъ пути наклонены къ  $AB$ ?

10. Отъ вершины угла въ  $41^{\circ} 7'$  движутся равномерно по сторонамъ его двѣ точки; одна проходитъ въ секунду 69 дюйм., другая—73 дюйм. Определить разстояніе между этими точками черезъ 4 секунды послѣ начала движенія.

11. Диагональ  $AC$  квадрата  $ABCD$  пересѣкаетъ среднюю линію  $MN$  въ точкѣ  $O$ ; прямая же  $MD$  пересѣкаетъ  $AC$  въ точкѣ  $P$ . Найти отрезокъ  $OP$  діагонали, если сторона квадрата 100 метр.

12. Владѣлецъ участка земли, имѣющаго форму прямоугольнаго треугольника  $ABC$ , прикупилъ со-сѣдній участокъ, тоже треугольной формы. Сторона  $AC$  у нихъ общая, а сторона  $AD$  составляетъ продолженіе гипотенузы  $AB$ . Зная, что  $D=10^{\circ} 43' 0''$ ,  $9$ ;  $BC=100$  саж.,  $CD=200$  саж., найти площадь всего участка.

13. Въ треугольникѣ  $ABC$  проведена прямая  $MN$  параллельно основанію  $c=53,4$  мет.; далѣе  $A=50^{\circ} 25' 25''$  и  $B=62^{\circ} 40' 50''$ . Зная, что трапеція

*AMNB* составляет  $\frac{1}{2}$  треугольника *MCN*, определить положеніе точки *M*.

14. Наблюдатель, находящійся на вершинѣ горы въ километръ высокою, видитъ разстояніе двухъ башенъ у подножія горы подъ угломъ въ  $60^\circ$ ; кромѣ того, угловыя пониженія обѣихъ башенъ соотвѣтственно равны  $14^\circ 30'$  и  $27^\circ 20'$ . Определить разстояніе между башнями.

15. На башнѣ въ  $41\frac{1}{2}$  метра вышины поставленъ шпиль; изъ точки, находящейся въ одной горизонтальной плоскости съ основаніемъ башни и въ  $66\frac{1}{2}$  мет. отъ этого основанія, шпиль видѣнъ подъ угломъ зрѣнія въ  $50'$ . Определить высоту шпиля.

16. Два наблюдателя расположились на разстояніи 100 мет. другъ отъ друга, причемъ лучъ зрѣнія, проходя отъ одного къ другому, касается основанія круглой башни, находящейся между ними. Первый наблюдатель видитъ основаніе башни подъ угломъ  $10^\circ 25'$ , второй—подъ угломъ  $7^\circ 30'$ . Найти радіусъ основанія башни.

17. Съ берега озера въ 150 метр. высокою видна туча и ея отраженіе въ водѣ; угловая высота первой  $15^\circ$ , угловое пониженіе второго  $45^\circ$ . Какъ высоко находится туча?

18. Съ борта парохода, плывущаго по рѣкѣ къ сѣверу, шпицы двухъ колоколенъ видны по одной прямой въ западномъ направленіи. Чась спустя дальняя колокольня видна по направленію къ юго-западу, ближняя—къ юго-юго-западу. Найти скорость парохода, если разстояніе между колокольнями 8 км.

19. Чтобы вычислить длину *AB* озера, измѣрили

на берегу его разстоянія  $AC = 100$  саж. и  $CB = 110$  саж., а также угол  $ACB = 48^\circ$ . Найти  $AB$ .

20. Желая найти разстояніе между  $A$  и недоступнымъ пунктомъ  $E$ , наблюдатель выбралъ базисъ  $AB = 200$  мет. въ направленіи, перпендикулярномъ къ  $AE$ , а затѣмъ измѣрилъ другой базисъ  $AC = 178$  мет., расположенный подъ угломъ  $27^\circ 50'$  къ первому. Зная, что  $C$  лежитъ на  $BE$ , найти  $AE$ .

21. Чтобы опредѣлить длину стѣны  $AB$ , наблюдатель помѣстился къ югу отъ одного конца ея, потомъ къ западу отъ другого, и стѣна въ обоихъ случаяхъ представлялась ему подъ угломъ въ  $30^\circ$ ; разстояніе между пунктами наблюденія 100 мет. Какъ велика длина стѣны?

22. На площади около наклонной Пизанской башни воздвигаютъ помость для художника, желающаго срисовать башню. Высота помоста 2 мет., а разстоянія его основанія и вершины отъ верхушки башни соответственно равны 15 мет. и 14 мет. Гдѣ надо построить помость, чтобы съ него башня была видна подъ угломъ въ  $45^\circ$ ?

23. Опредѣлить разстояніе между недоступными точками  $A$  и  $B$ , если базисъ  $CD = 2000$  фут., уголъ  $ACD = 96^\circ 40'$ , уголъ  $BCD = 52^\circ 40'$ , уголъ  $ADC = 57^\circ 1'$  и уголъ  $BDC = 87^\circ 15'$ .

24. Вершины двухъ горъ лежатъ въ одной вертикальной плоскости съ наблюдателемъ; ихъ угловыя высоты  $9^\circ 30'$  и  $18^\circ 10'$ . Если наблюдатель, оставаясь въ той же вертикальной плоскости, приблизится по горизонтальному направленію на 6365 метр., то угловыя высоты обѣихъ горъ сравняются:  $u = 37^\circ$ . Опредѣлить высоту каждой горы.

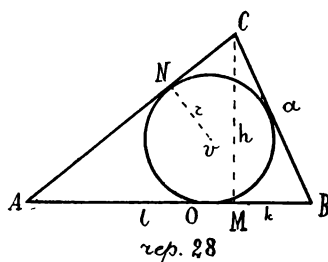
25. Три кавалерійскихъ отряда расположились во-кругъ крѣпости въ точкахъ  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , не лежащихъ на одной прямой. Первый отрядъ находится на разстояніи 7373 саж. отъ третьяго и видитъ крѣпость подъ угломъ  $\alpha = 15^\circ 22' 12''$  съ направленіемъ  $AB$ . Третій удаленъ отъ второго на 5616 саж. и видитъ крѣпость по направленію биссектриссы угла  $C = 58^\circ 6' 30''$ . Во сколько минутъ первый отрядъ можетъ доскакать до воротъ крѣпости, если будетъ ѣхать со скоростью  $v = 204,8 \frac{\text{дюйм.}}{\text{сек.}}$  ?

## Глава X. Особенности случаи рѣшенія прямоугольных треугольниковъ.

52. Подъ именемъ «особенныхъ случаевъ» подразумеваются заданія, въ которыя входятъ не одни только главные элементы, а и вспомогательные, какъ-то: высоты, биссектриссы, медіаны, проэктіи сторонъ другъ на друга, радіусы вписанныхъ и описанныхъ круговъ и т. п. Кромѣ того, къ особеннымъ случаямъ относятся и такія заданія, въ которыя хотя и входятъ лишь главные элементы треугольника, но не порознь, а въ различныхъ сочетаніяхъ другъ съ другомъ.

53. Введемъ обозначенія: « $h$ » — высота, опущенная изъ вершины прямого угла на гипотенузу; « $k$ » и « $l$ » — проэктіи сторонъ « $a$ » и « $b$ » на гипотенузу (отрѣзки гипотенузы, образуемыя высотой « $h$ »); « $R$ » и « $r$ » — радіусы описаннаго и вписаннаго круговъ.

На чертежѣ указаны:  $h = CM$ ,  $k = MB$ ,  $l = AM$ ,  $AO = OB = R$  и  $VN = r$ .



54. Многие изъ «особенныхъ случаевъ» рѣшаются при помощи уже извѣстныхъ намъ соотношеній; этими заданиями мы сперва и займемся.

### Первая группа заданий.

- |                    |                    |
|--------------------|--------------------|
| 1. $a, h$          | 13. $a + b, a + c$ |
| 2. $b, h$          | 14. $c, A - B$     |
| 3. $k, h$          | 15. $a, A - B$     |
| 4. $l, h$          | 16. $b, A - B$     |
| 5. $a + h, a - h$  | 17. $A$ или $B, R$ |
| 6. $b + h, b - h$  | 18. $A$ или $B, F$ |
| 7. $a + k, a - k$  | 19. $2p, r$        |
| 8. $b + l, b - l$  | 20. $2p, F$        |
| 9. $c + a, c - a$  | 21. $A$ или $B, r$ |
| 10. $k + h, k - h$ | 22. $p - a, r$     |
| 11. $l + h, l - h$ | 23. $p - b, r$     |
| 12. $a + b, a - b$ | 24. $a + b, F$     |

п т. п.

### Вторая группа заданий.

- |           |                |
|-----------|----------------|
| 1. $k, l$ | 6. $h, r$      |
| 2. $c, h$ | 7. $h, 2p$     |
| 3. $c, F$ | 8. $F, r$      |
| 4. $h, F$ | 9. $F, p - c$  |
| 5. $h, R$ | 10. $F, c + h$ |

п т. п.

Всѣ поименованныя во второй группѣ заданія легко приводятся къ первому изъ нихъ; рѣшеніе же перваго я сейчасъ укажу.

### Примѣръ I.

Проекціи катетовъ « $a$ » и « $b$ » соответственно равны 20 см. и 5 см. Рѣшить треугольникъ.

### Рѣшеніе.

Изъ чертежа нетрудно замѣтить, что

$$1) k + l = c,$$

$$2) k \cdot l = h^2.$$

Подставляя данное значеніе « $k$ » и « $l$ », находимъ

$$c = 25 \text{ см.}, \quad h = 10 \text{ см.}$$

Далѣе

$$\operatorname{ctg} A = \frac{l}{h}, \quad \operatorname{ctg} B = \frac{k}{h},$$

$$a = \sqrt{h^2 + k^2}, \quad b = \sqrt{h^2 + l^2}.$$

Производя вычисленія, находимъ

$$A = 63^\circ 26' 6'', \quad B = 26^\circ 33' 54'', \quad a = 10 \sqrt{5} \text{ см.},$$

$$b = 5 \sqrt{5} \text{ см.}$$

55. Выведемъ теперь двѣ формулы, кругъ примѣненія коихъ наиболѣе обширенъ.

56. **ФОРМУЛА КАТЕТОВЪ.** Если  $a > b$ , то

$$a \pm b = c \sqrt{2} \sin (A \pm 45^\circ).$$

Для вывода этой формулы воспользуемся чертежомъ 16 (стр. 50). Изъ треугольника  $ABD$  по формулѣ синусовъ имѣемъ

$$\frac{DB}{AB} = \frac{\sin \angle DAB}{\sin \angle ADB};$$

точно также изъ треугольника  $AKB$  находимъ

$$\frac{KB}{AB} = \frac{\sin \angle KAB}{\sin \angle AKB}.$$

Подставляя вмѣсто указанныхъ угловъ и сторонъ ихъ значенія, найденныя раньше, получимъ двѣ важныя формулы

$$I) \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\sin \left( A + \frac{C}{2} \right)}{\sin \frac{C}{2}},$$

$$II) \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Эти формулы выведены для косоугольнаго треугольника. Положимъ теперь, что  $C = 90^\circ$ ; тогда  $A + \frac{C}{2} = A + 45^\circ$ ,  $\frac{A-B}{2} = A - 45^\circ$ ,  $\sin \frac{C}{2} = \cos \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; обѣ формулы примутъ видъ слѣдовательно,

$$\frac{a+b}{c} = \sqrt{2} \sin (A + 45^\circ), \quad \frac{a-b}{c} = \sqrt{2} \sin (A - 45^\circ)$$

и мы ихъ можемъ соединить въ одну искомую

$$29) \quad a \pm b = c \sqrt{2} \sin (A \pm 45^\circ).$$

57. Выведенная нами формула катетовъ примѣняется при слѣдующихъ заданіяхъ:

- |                           |                        |
|---------------------------|------------------------|
| 1. $a + b, c$             | 10. $l - h, A$ или $B$ |
| 2. $a - b, c$             | 11. $k + h, a$         |
| 3. $a + b, A$ или $B$     | 12. $k - h, a$         |
| 4. $a - b, A$ или $B$     | 13. $l + h, b$         |
| 5. $a^2 - b^2, c$         | 14. $l - h, b$         |
| 6. $a^2 - b^2, A$ или $B$ | 15. $2p, c$            |
| 7. $k + h, A$ или $B$     | 16. $2p, R$            |
| 8. $k - h, A$ или $B$     | 17. $2p, A$ или $B$    |
| 9. $l + h, A$ или $B$     | 18. $R, r$             |

и т. п.

### Примѣръ II.

Радиусы круговъ описаннаго и вписаннаго соответственно равны 10 метр. и 4 метр. Рѣшить прямоугольный треугольникъ.

Рѣшеніе.

Полагая  $R = 10, r = 4$ , непосредственно имѣемъ

$$c = 2R, p - c = r,$$

откуда

$$p = 2R + r, 2p = 4R + 2r,$$

$$2p - c = 2R + 2r, 2p - c = a + b.$$

Итакъ мы нашли « $a + b$ » и « $c$ ». Примѣнимъ формулу катетовъ

$$2(R + r) = 2R \sqrt{2} \sin(A + 45^\circ),$$

и окончательно

$$\sin(A + 45^\circ) = \frac{R + r}{R\sqrt{2}}.$$

Полагая теперь  $C = 90^\circ$ , находимъ

$$\sin\left(C + \frac{B}{2}\right) = \cos \frac{B}{2}, \quad \sin \frac{C-A}{2} = \sin \frac{B}{2}$$

п

$$\frac{c+a}{b} = \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}}, \quad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}},$$

откуда сейчасъ же получимъ искомыя формулы.

59. Формулы Гаусса примѣняются при слѣдующихъ заданіяхъ:

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. $c + a$ , $A$ или $B$  | 13. $a + k$ , $A$ или $B$ |
| 2. $c - a$ , $A$ или $B$  | 14. $a - k$ , $A$ или $B$ |
| 3. $c + a$ , $b$          | 15. $b + l$ , $A$ или $B$ |
| 4. $c - a$ , $b$          | 16. $b - l$ , $A$ или $B$ |
| 5. $a + h$ , $A$ или $B$  | 17. $a + k$ , $h$         |
| 6. $a - h$ , $A$ или $B$  | 18. $a - k$ , $h$         |
| 7. $a + h$ , $k$          | 19. $b + l$ , $h$         |
| 8. $a - h$ , $k$          | 20. $b - l$ , $h$         |
| 9. $b + h$ , $A$ или $B$  | 21. $2p$ , $a$            |
| 10. $b - h$ , $A$ или $B$ | 22. $2p$ , $b$            |
| 11. $b + h$ , $l$         | 23. $p - a$ , $a$         |
| 12. $b - h$ , $l$         | и т. п.                   |

### Примѣръ III.

Рѣшить прямоугольный треугольникъ, въ которомъ одинъ изъ катетовъ равенъ 8 метр., а разность между полупериметромъ и тѣмъ же катетомъ равна 4 метр.

Рѣшеніе.

Полагая  $a = 8$ ,  $p - a = 4$ , находимъ

$$p = 12, \quad 2p = 24, \quad c + b = 2p - a = 16.$$

Зная « $c + b$ » и « $a$ », можно примѣнить первую формулу Гаусса. Имѣемъ

$$\frac{c+b}{a} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = 2,$$

$$A = 53^{\circ} 7' 46'', 26.$$

Дальнѣйшее рѣшеніе не представляетъ никакихъ затрудненій. Имѣемъ

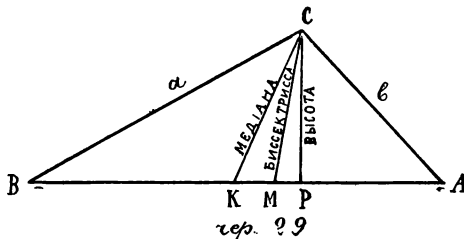
$$\frac{a}{c} = \sin A, \lg c = \lg a - \lg \sin A, \lg c = 1, c = 10 \text{ метр.}$$

Далѣе

$$b = 2p - a - c, b = 6 \text{ метр.}$$

## Глава XI. Особенности случаи рѣшенія косоугольных треугольниковъ.

60. Кромѣ прежнихъ обозначеній введемъ еще слѣдующія:  $h_a, h_b, h_c$  — высоты;  $m_a, m_b, m_c$  — медианы къ сторонамъ  $a, b, c$ ;  $\beta_A, \beta_B, \beta_C$  — биссектриссы угловъ  $A, B, C$ ;  $r_a, r_b, r_c$  — радіусы вѣтвписанныхъ круговъ, касающихся сторонъ  $a, b, c$ ; « $k$ » и « $l$ »



— проэкціи сторонъ « $a$ » и « $b$ » на « $c$ »; « $u$ » и « $v$ » — отрѣзки стороны « $c$ », образованныя биссектриссой угла  $C$ .

На чертежѣ показаны:

$$AP = l, PB = k, AM = v, MB = u.$$

61. Многія изъ заданій косоугольнаго треугольника легко приводятся къ основнымъ случаямъ. Таковы три слѣдующихъ группы.

### I. Случаи, въ которыхъ примѣняется теорема синусовъ.

- |                        |                       |
|------------------------|-----------------------|
| 1. $A, B, R$           | 10. $R, k, A$ или $B$ |
| 2. $a, b, R$           | 11. $R, l, A$ или $B$ |
| 3. $c, R, A$           | 12. $R, k, a$ или $b$ |
| 4. $c, R, a$           | 13. $R, k, h_c$       |
| 5. $a \pm b, A, R$     | 14. $R, l, a$ или $b$ |
| 6. $c, R, A - B$       | 15. $R, a, A - B$     |
| 7. $a^2 \pm b^2, A, R$ | 16. $R, ab, A$        |
| 8. $R, A, h_c$         | 17. $A, B, ab$        |
| 9. $R, a, h_c$         | 18. $ab, A, h_c$      |

и т. п.

### II. Случаи, основанные на рѣшеніи частныхъ тр—овъ.

- |                        |                         |
|------------------------|-------------------------|
| 1. $a, b, h_c$         | 12. $a, h_c, \beta_c$   |
| 2. $c, m_c, a$ или $b$ | 13. $k, h_c, \beta_c$   |
| 3. $a, u, \beta_c$     | 14. $A, h_c, \beta_c$   |
| 4. $b, v, A$           | 15. $C, h_c, \beta_c$   |
| 5. $A, B, \beta_c$     | 16. $k, u, B$           |
| 6. $a, B, \beta_c$     | 17. $h_c, u, A - B$     |
| 7. $u, B, \beta_c$     | 18. $a, \beta_c, A - B$ |
| 8. $a, k, < (a, m_c)$  | 19. $\beta_c, u, A - B$ |
| 9. $a, h_a, h_c$       | 20. $k, \beta_c, A - B$ |
| 10. $m_c, k, B$        | 21. $a, u, A - B$       |
| 11. $c, m_c, F'$       |                         |

и т. п.

**Замѣчаніе.** Уголъ, составленный высотой  $h_c$  и биссектрисой  $\beta_c$ , всегда равенъ  $\frac{A+B}{2}$ ; дѣйствительно (чер. 29)

$$\angle MCP = \angle BCP - \angle BCM,$$

$$\angle (h_c, \beta_c) = (90^\circ - B) - \frac{C}{2};$$

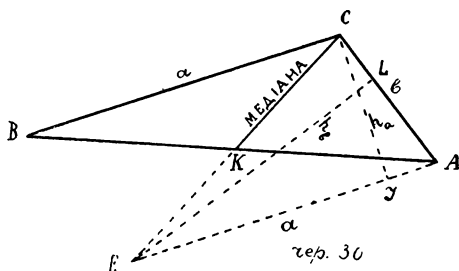
такъ какъ  $\frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2}$ , то  $90^\circ - B - \frac{C}{2} =$   
 $= 90^\circ - B - 90^\circ + \frac{A+B}{2} = \frac{A+B}{2} - B$  и

$$31) \quad \angle (h_c, \beta_c) = \frac{A+B}{2}.$$

При помощи указаннаго соотношенія легко рѣшаются заданія №№ 12 — 21.

### III. Случаи, основанные на рѣшеніи вспомогательнаго треугольника ACE.

62. Проведемъ въ треугольникѣ  $ABC$  (чер. 30) медиану  $m_c = CK$  и продолжимъ ее на разстояніе  $KE = CK$ ; тогда двѣ прямыя  $AB$  и  $CE$  дѣлятся



взаимно пополамъ, вслѣдствіе чего ихъ можно принять за діагонали параллелограмма  $ABCE$ . — Теперь въ треугольникѣ  $ACE$  имѣемъ:

$$AC = b, AE = a, CE = 2m_c, \angle CAE = A + B;$$

$$CI = h_a, EL = h_b.$$

- |                              |                                             |
|------------------------------|---------------------------------------------|
| 1. $C, m_c, a$ или $b$       | 9. $a, \angle (a, m_c), \angle (b, m_c)$    |
| 2. $a, h_b, m_c$             | 10. $m_c, \angle (a, m_c), \angle (b, m_c)$ |
| 3. $C, m_c, h_a$             | 11. $b, h_a, \angle (a, m_c)$               |
| 4. $a, m_c, h_a$             | 12. $h_a, \angle (a, m_c), \angle (b, m_c)$ |
| 5. $a, h_a, \angle (a, m_c)$ | 13. $h_a, \angle (a, m_c), \angle (c, m_c)$ |
| 6. $a, b, m_c$               | 14. $h_a, m_c, \angle (b, m_c)$             |
| 7. $a, b, \angle (a, m_c)$   | 15. $h_a, h_b, m_c,$                        |
| 8. $a, m_c, \angle (b, m_c)$ | и т. п.                                     |

63. Въ тѣхъ случаяхъ, когда рѣшеніе треугольника при помощи основныхъ формулъ (синусовъ, тангенсовъ, периметровъ) является труднымъ или слишкомъ длиннымъ, полезно знать и примѣнить другія соотношенія между различными элементами треугольника. Выводомъ главнѣйшихъ изъ этихъ соотношеній мы теперь и займемся.

64. **Формулы Мольвейде.** Эти формулы были уже выведены въ § 56; здѣсь мы придадимъ первой изъ нихъ нѣсколько иной видъ.

Мы имѣли раньше

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin(A + \frac{C}{2})}{\sin \frac{C}{2}}, \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}.$$

Замѣчая, что  $\frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2}$ , имѣемъ

$$A + \frac{C}{2} = 90^\circ + \frac{A-B}{2}, \text{ и окончательно}$$

$$32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} \\ \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} \end{array} \right.$$

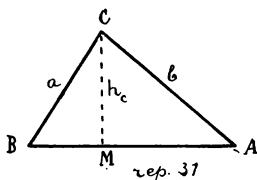
Эти формулы даны германскимъ математикомъ и астрономомъ Мольвейде (1808).— Изъ нихъ легко выводятся формулы: катетовъ, Гаусса, тангенсовъ.

**65. Формулы высотъ.** Найдемъ зависимость между  $h_c$ ,  $R$  и  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .—Изъ тр—ка  $BCM$  (чер. 31) находимъ

$$h_c = a \sin B.$$

Но такъ какъ  $a = 2R \sin A$ , то

$$h_c = 2R \sin A \sin B.$$



Пользуясь методомъ круговой перестановки, получимъ

$$33) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_a = 2R \sin B \sin C, \\ h_b = 2R \sin A \sin C, \\ h_c = 2R \sin A \sin B. \end{array} \right.$$

**66. ТЕОРЕМА ВЫСОТЪ.** Во всякомъ треугольникѣ стороны обратно пропорціональны соотвѣтствующимъ имъ высотамъ.

Пользуясь выраженіемъ для площади треугольника, получимъ

$$ah_a = bh_b,$$

откуда

$$a : b = h_b : h_a$$

или

$$a : b = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b}.$$

Точно такъ же

$$b : c = \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

Соединяя обѣ пропорціи вмѣстѣ, находимъ

$$34) \quad a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

**67. Формула Герона.** Установимъ еще одну простую зависимость между  $h_c$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $R$ . Имѣемъ  $\frac{a}{\sin A} = 2R$ ; но изъ тр—ка  $ACM$  (чер. 31) находимъ  $\sin A = \frac{h_c}{b}$ , поэтому

$$\frac{ab}{h_c} = 2R.$$

Опять воспользуемся методомъ круговой перестановки и замѣтимъ, что каждое отношеніе:  $\frac{ab}{h_c}$ ,  $\frac{bc}{h_a}$ ,  $\frac{ac}{h_b}$  есть величина постоянная, равная  $2R$ . Итакъ

$$35) \quad \frac{a \cdot b}{h_c} = \frac{a \cdot c}{h_b} = \frac{b \cdot c}{h_a} = 2R.$$

**68.** Изъ формулы Герона выводимъ

$$h_c = \frac{ab}{2R}.$$

Помножая обѣ части предыдущаго равенства на  $c$  и замѣчая, что  $ch_c = 2F$ , находимъ новую формулу для площади

$$36) \quad F = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

**69. Теорема котангенсовъ.** При выводѣ формулъ периметровъ мы имѣли равенство

$$r = (p - a) \operatorname{tg} \frac{A}{2}.$$

Перепишемъ его такъ

$$r = \frac{p-a}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}}$$

и воспользуемся опять методомъ круговой перестановки.  
Тогда

$$37) \quad \frac{p-a}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}} = \frac{p-b}{\operatorname{ctg} \frac{B}{2}} = \frac{p-c}{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}} = r.$$

70) Изъ предыдущаго находимъ

$$\frac{p-a}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}} = r, \quad \frac{p-b}{\operatorname{ctg} \frac{B}{2}} = r, \quad \frac{p-c}{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}} = r.$$

Перемножимъ почленно всѣ три равенства

$$\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}} = r^3;$$

или, зная что  $F = pr$  и, слѣдовательно,  $F^3 = p^3 r^3$

$$\frac{p^3 (p-a)(p-b)(p-c)}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}} = F^3.$$

Но  $p(p-a)(p-b)(p-c) = F^2$ , поэтому все выраженіе можно сократить на  $F^2$  и тогда

$$38) \quad F = p^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

71. Теорема радіусовъ. Пусть  $O_1$  обозначаетъ центръ вѣтвиписаннаго круга, касающагося стороны «с» (чер. 32). Тогда  $OE = r$ ,  $O_1K = r_c$ . Изъ подобныхъ тр—овъ  $OEC$  и  $O_1KC$  находимъ

$$\frac{O_1K}{OE} = \frac{CK}{CE} \text{ или } \frac{r_c}{r} = \frac{CK}{p-c}.$$

Найдемъ величину касательной  $CK$ . Имѣемъ

$$CK = CN.$$

и  $CK = a + BM,$

$$CN = b + MA.$$

Складывая почленно и замѣчая, что  $BM + MA = c$ , находимъ

$$2CK = a + b + c,$$

39)  $CK = p.$

Теперь

$$\frac{r_c}{r} = \frac{p}{p - c},$$

откуда

$$r_c (p - c) = pr$$

или

$$r_c (p - c) = F.$$

Точно также

$$r_a (p - a) = F, \quad r_b (p - b) = F$$

и окончательно

40)  $r_a (p - a) = r_b (p - b) = r_c (p - c) = F.$

72. Выведенныя формулы могутъ служить для рѣшенія треугольника при слѣдующихъ заданіяхъ:

1.  $a \pm b, A, B$

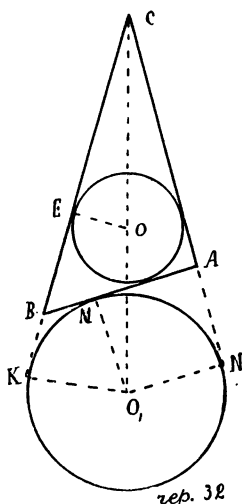
2.  $a \pm b, A, C$

3.  $a \pm b, c, C$

4.  $a \pm b, c, A - B$

5.  $c, C, A - B$

6.  $c, C, a^2 - b^2$



- |                       |                   |
|-----------------------|-------------------|
| 7. $A, B, a^2 - b^2$  | 21. $c, r, C$     |
| 8. $p - a, p - b, C$  | 22. $a + b, r, C$ |
| 9. $p - b, p - c, R$  | 23. $C, r, F$     |
| 10. $A, h_a, h_b$     | 24. $c, R, r$     |
| 11. $h_a, h_b, h_c$   | 25. $c, r, F$     |
| 12. $p - a, A, B$     | 26. $2p, A, B$    |
| 13. $p - a, p - b, A$ | 27. $2p, r, a$    |
| 14. $p, p - a, r$     | 28. $2p, r, C$    |
| 15. $p, p - a, A$     | 29. $2p, A, B$    |
| 16. $p - a, B, r$     | 30. $2p, a, F$    |
| 17. $p - a, r, F$     | 31. $r, r_a, A$   |
| 18. $p - c, r, A - C$ | 32. $r_a, r_b, A$ |
| 19. $r, A, B$         | 33. $c, r_c, F$   |
| 20. $c, r, A$         | и т. п.           |

## Отвѣты и рѣшенія къ части I-ой.

### Къ главѣ V-ой (стр. 39).

- 1) 9,0076 мет. 2) 13,5716 мет. 3) Нѣтъ. 4) 26,861 ф. 5)  $26^\circ 32' 54''$ , 3.  
 6)  $50^\circ 45' 10''$ . 7) 71,314 см. 8)  $48^\circ 35' 25''$ . 9)  $V_{\text{пас.}} = 36, 7875 \frac{\text{км.}}{\text{часъ}}$ ,  $V_{\text{моб.}} = 15,7072 \frac{\text{км.}}{\text{часъ}}$ . 10) Велосипедистъ—961,525 мет., пѣшеходъ—274,72 мет.  
 11) 14,114 км. 12) 56,7127 мет. 13) 2 мет. 14) Подъ угломъ  $132^\circ$  съ берегомъ.  
 15) 60,2883 саж. 16) 304,721 мет. 17) 8207,5 км. 18)  $73^\circ 39' 21''$ . 19) 10 м. 15 с.  
 20) Если  $B$ —уголъ при вершинѣ, то  $\sin \frac{B}{2} = \frac{1}{n-1}$ ;  $B = 60^\circ$  при  $n = 3$  и  $B = 38^\circ 56' 33''$ , 4 при  $n = 4$ .

### Къ главѣ IX-ой (стр. 74).

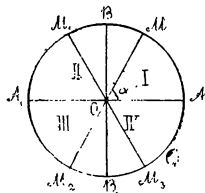
- 1) 3) саж. 2)  $60^\circ$ . 3)  $56^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $64^\circ$ . 4)  $120^\circ$ . 5) 110,83 фут. 6) 196,7 фут.  
 7) 4550,9 мет. 8)  $C = 68^\circ 9' 2''$ . 9) Задача невозможна. 10) 200 дм. 11) 23,57 мет.  
 12) 5380,37 кв. с. 13)  $MC = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C} V_{0,6} = 47,678$ . 14) 3438,7 мет. 15) 1,361 мет.  
 16) 3,8128 мет. 17) 170  $\sqrt{3}$  мет. 18) 13 км. 657,5 мет. 1) 85,902 саж. 20) 330,25 мет.  
 21)  $ABCD$  — равнобокая трапеція; продолженія сторонъ  $DA$  и  $CB$  пересѣкаются въ  $E$  подъ прямымъ угломъ;  $AB = \frac{100}{\sqrt{3}} = 57,735$  саж.  
 22) 5,9826 мет. 23) 2636 фут. 24) 1369,2 мет. и 3699,6 мет. 25) 28 мин.

# ЧАСТЬ ВТОРАЯ



## Глава I. Измѣреніе угловъ и линій.

1. Предѣлы измѣненія угловъ.—Въ «Прямолинейной Тригонометріи» мы имѣли дѣло съ углами, не превышающими  $180^\circ$ , но элементарная геометрія рассматриваетъ иногда углы больше  $180^\circ$  и даже  $360^\circ$ . Такъ, напримѣръ, извѣстная въ планиметрій формула суммы внутреннихъ угловъ правильнаго  $n$ -угольника:  $2d(n-2)$  приводитъ къ нахожденію угловъ, большихъ  $360^\circ$ , если  $n$  достаточно велико. Однако при этомъ не говорится, какъ мы должны представлять себѣ такіе углы. Съ другой стороны, если углы измѣрять дугами, основываясь на теоремѣ: «центральный уголъ пропорціоналенъ соотвѣтствующей ему дугѣ», то возрастанію угла нельзя положить предѣла. Дѣйствительно, пусть  $\alpha$ —центральный уголъ  $АОМ$ , измѣряющійся дугою  $АМ$  (черт. 1). По-



Черт. I.

ложимъ, что сторона  $OA$  неподвижна и пусть другая сторона  $OM$  вращается около точки  $O$  вверхъ по окружности, принимая послѣдовательно положенія:  $OB$ ,  $OM_1$ ,  $OA_1$ ,  $OM_2$ ,  $OB_1$ ,  $OM_3$ ,  $OA$ ,  $OM$  и т. д. Съ измѣненіемъ положенія подвижной стороны  $OM$  будетъ измѣняться и величина угла  $\alpha$ ; такъ,  $\angle AOM = \alpha$ ,  $\angle AOB = 90^\circ$ ,

$\angle AOM_1 = 180^\circ - \alpha$ ,  $\angle AOA_1 = 180^\circ$ ,  $\angle AOM_2 = 180^\circ + \alpha$ ,  $\angle AOB_1 = 270^\circ$ ,  $\angle AOM_3 = 360^\circ - \alpha$ ,  $\angle AOA = 360^\circ$ ,  $\angle AOM = 360^\circ + \alpha$  и т. д., причемъ при дальнѣйшемъ вращеніи стороны  $OM$  углы на чертежѣ будутъ совпадать съ прежде найденнымп углами, а по величинѣ будутъ больше первыхъ на  $360^\circ$ . При дальнѣйшемъ вращеніи сторона  $OM$  можетъ описать одну, двѣ, три, . . . . ,  $n$  полныхъ окружностей, гдѣ  $n$ —цѣлое число, сколь угодно большее; дуги при этомъ будутъ возрастать, а слѣдовательно будутъ возрастать и измѣряемые ими углы. Итакъ, углы могутъ измѣняться отъ нуля до безконечности.

2. Два діаметра, перпендикулярные другъ къ другу, принято называть *сопряженными*. Обыкновенно за сопряженные принимаютъ горизонтальный  $AA_1$  и вертикальный  $BB_1$  (черт. 1). Эти діаметры дѣлятъ окружность и кругъ на 4 равныя части; части окружности называются *четвертями*, части круга—*квадрантами*. Соотвѣтственно положенію подвижной стороны  $OM$  говорятъ, что уголъ лежитъ въ томъ или иномъ квадрантѣ. Порядокъ четвертей и квадрантовъ указанъ на чертежѣ. Углы, имѣющіе общія стороны, равны или же разнятся на цѣлое число окружностей.

3. **Радіальное измѣреніе угловъ.**—Кромѣ обычнаго способа измѣрять углы въ дуговыхъ единицахъ, т. е. выражать ихъ въ градусахъ, минутахъ, секундахъ и ихъ частяхъ, существуетъ другой способъ, дающій возможность измѣрять углы прямыми линіями и, въ частности, выражать ихъ величины въ частяхъ радіуса. Громадныя преимущества новаго измѣренія

состоять въ томъ, что стороны и углы выражаются тогда однородными единицами. Это измѣреніе называется *радіальнымъ*.

4. Докажемъ сначала слѣдующую теорему.

**Теорема.** Центральный уголъ, опирающійся на дугу, равную радіусу, есть величина постоянная.

Пусть  $OA = OM = R$  и дуга  $AM = R$  (черт. 2).

Называя искомый уголъ через  $\rho$ , получимъ:

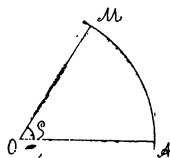
$$\frac{\rho}{360^\circ} = \frac{AM}{2\pi R},$$

откуда:

$$\frac{\rho}{360^\circ} = \frac{R}{2\pi R} = \frac{1}{2\pi}$$

и

$$1) \quad \rho = \frac{180^\circ}{\pi}.$$



Черт. 2.

Такъ какъ  $180^\circ$  и  $\pi$  суть величины постоянныя, то и отношеніе ихъ постоянно; слѣдовательно,  $\rho$  есть величина постоянная, независящая отъ радіуса, что и т. д.

5. **Радіанъ.**—Уголъ  $\rho$  называютъ *радіаномъ* и принимаютъ его за единицу мѣры для угловъ. Такимъ образомъ мы приходимъ къ радіальному измѣренію угловъ. Въ дуговомъ измѣреніи радіанъ содержитъ  $57^\circ 17' 44''$ , 806 съ точностью до 0,001 секунды.

6. **Круговая мѣра угловъ.**—Установимъ теперь способъ измѣренія любого угла при помощи радіана. Для этого возьмемъ нѣкоторый центральный уголъ, длина дуги котораго равна  $l$ , а самый уголъ обозначимъ черезъ  $x$ . Тогда изъ пропорціи:

$$x : \rho = l : R$$

находимъ:  $x = \rho \frac{l}{R}$ . Но  $\rho$ —радіанъ, принятый нами за единицу мѣры, слѣдовательно

$$2) \quad x = \frac{l}{R},$$

т. е. отношеніе длины дуги къ длинѣ радіуса есть мѣра соотвѣтствующаго центральнаго угла и называется круговою мѣрою угла.

7. Найдемъ теперь круговую мѣру угловъ въ  $360^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ . Длины соотвѣтственныхъ дугъ равны:  $2\pi R$ ,  $\pi R$ ,  $\frac{1}{2}\pi R$ , поэтому формула (2) даетъ:  $360^\circ = 2\pi$ ;  $180^\circ = \pi$ ;  $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ . Въ слѣдующей таблицѣ приведены круговыя мѣры нѣкоторыхъ болѣе употребительныхъ угловъ:

|                   |                  |                   |                   |                  |                  |
|-------------------|------------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|
| $360^\circ \dots$ | $2\pi$           | $120^\circ \dots$ | $\frac{2\pi}{3}$  | $45^\circ \dots$ | $\frac{\pi}{4}$  |
| $270^\circ \dots$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $108^\circ \dots$ | $\frac{3\pi}{5}$  | $36^\circ \dots$ | $\frac{\pi}{5}$  |
| $180^\circ \dots$ | $\pi$            | $90^\circ \dots$  | $\frac{\pi}{2}$   | $30^\circ \dots$ | $\frac{\pi}{6}$  |
| $150^\circ \dots$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $72^\circ \dots$  | $\frac{2\pi}{5}$  | $18^\circ \dots$ | $\frac{\pi}{10}$ |
| $144^\circ \dots$ | $\frac{4\pi}{5}$ | $60^\circ \dots$  | $\frac{\pi}{3}$   | $15^\circ \dots$ | $\frac{\pi}{12}$ |
| $135^\circ \dots$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $54^\circ \dots$  | $\frac{3\pi}{10}$ | и т. д.          |                  |

8. Формулы перехода.—Для перехода отъ дуговаго измѣренія угловъ къ радіальному и обратно можно пользоваться слѣдующими простыми формулами, вытекающими изъ равенствъ (1) и (2):

$$3) \quad \alpha = \frac{180}{\pi} x,$$

$$4) \quad x = \frac{\pi}{180} \alpha.$$

Здѣсь  $\alpha$  обозначаетъ величину угла въ дуговомъ измѣреніи,  $x$ —въ радіальномъ.

**Примѣръ 1.** Выразить въ градусахъ, минутахъ и секундахъ уголъ, круговая мѣра котораго равна  $\frac{2}{5}$ .

По формулѣ (3) находимъ:

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{2}{5} = \frac{72^\circ}{3,141593},$$

откуда:

$$\alpha = 22^\circ 55' 6''.$$

**Примѣръ 2.** Найти круговую мѣру угла въ  $32^\circ$ .

По формулѣ (4) находимъ:

$$x = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot 32^\circ = \frac{8 \cdot \pi}{45} = \frac{8,3,141593}{45},$$

откуда:

$$x = 0,558505.$$

**9. Таблицы перехода.**—Мы видимъ, что въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ примѣненіе формулъ (3) и (4) сопряжено съ утомительными ариѳметическими выкладками; во избѣжаніе этого составлена таблица, значительно упрощающая подобныя вычисленія. У Глазенапа такова таблица на стр. 107, озаглавленная: *длина дуги круга въ частяхъ радіуса, равнаго 1*. Въ ней даны радіальныя величины угловъ, выраженныхъ въ градусахъ, минутахъ и секундахъ; эти величины вычислены съ 7-ю десятичными знаками, т. е. съ

точностью до одной десятимиллионной. Покажемъ на двухъ примѣрахъ, какъ пользоваться этой таблицей.

**Примѣръ 3.** Найти круговую мѣру угла въ  $7^{\circ} 15' 42''$ :

На стр. 107 Глазенапа находимъ послѣдовательно въ столбцахъ для градусовъ, минутъ и секундъ

$$\begin{array}{rcl} 7^{\circ} & \text{соотвѣтствуетъ} & 0,1221730 \\ 15' & & 0,0043633 \\ 42'' & \dots\dots & 0,0002036 \\ \hline 7^{\circ} 15' 42'' & \dots\dots\dots & 0,1267399. \end{array}$$

Итакъ,  $x = 0,1267399$ .

**Примѣръ 4.** Выразить въ градусахъ и т. д. уголъ, круговая мѣра коего равна  $\frac{5}{2}$ .

Имѣемъ:  $x = 2,5000000$ . Ищемъ это число въ таблицѣ: его нѣтъ; находимъ ближайшее меньшее 2,4958208, которому соотвѣтствуетъ  $143^{\circ}$ . Далѣе находимъ разность 0,0041792—между  $x$  и взятымъ его приближеніемъ — и отыскиваемъ эту разность въ столбцѣ для минутъ. Опять ближайшее меньшее равно 0,0040724, что соотвѣтствуетъ  $14'$ . Новую разность 0,0001067—между первымъ и вторымъ приближеніемъ—отыскиваемъ въ столбцѣ секундъ и находимъ почти точное число  $22''$ . Итакъ,

$$x = 143^{\circ} 14' 22''.$$

Указанныя дѣйствія располагаютъ слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{array}{rcl} 2,5000000 & & \\ 2,4958208 & . & 143^{\circ} \\ \hline 0,0041792 & & \\ 0,0040724 & . & 14' \\ \hline 0,0001068 & . & 22'' \end{array}$$

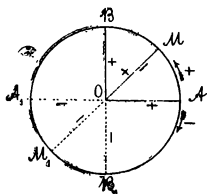
### Примѣры.

| Найти $x$ , если:                    | Найти $\alpha$ , если:   |
|--------------------------------------|--------------------------|
| 1. $\alpha = 17^\circ 19' 4''$ ;     | 6. $x = 0,35$ ;          |
| 2. $\alpha = 39^\circ 5' 7''$ ;      | 7. $x = \frac{2}{9}$ ;   |
| 3. $\alpha = 156^\circ 53' 0'',45$ ; | 8. $x = 1,47683$ ;       |
| 4. $\alpha = 200^\circ$ ;            | 9. $x = 5\frac{1}{3}$ ;  |
| 5. $\alpha = 515^\circ 39' 43'',2$ ; | 10. $x = \frac{75}{4}$ . |

**10. Понятіе о векторахъ.**—Въ Геометріи *направленія* линіи не играютъ никакой роли; тоже самое относится и къ дугамъ. Поэтому величины, съ которыми оперируетъ Геометрія, суть величины абсолютныя, подобно арифметическимъ величинамъ; ихъ называютъ англійскимъ терминомъ «*скаляръ*». Большинство же величинъ, встрѣчающихся въ природѣ, имѣютъ не только опредѣленный размѣръ, но и опредѣленное направленіе, на примѣръ *время* (прошедшее и будущее), *пространство*, проходимое движущимся тѣломъ, *температура* (выше и ниже нуля) и т. п. Таковы и многія аналитическія величины, какъ на примѣръ *силы*, *скорость* и *ускореніе* (въ механикѣ) и т. п. Всѣ эти величины называются «*векторы*». Къ числу векторовъ относятся и гониометрическія функціи; въ тригонометріи мы уже встрѣтили одинъ случай, когда отрѣзокъ прямой, лежащій на продолженіи стороны тупого угла, былъ принятъ нами за величину отрицательную, вслѣдствіе чего косинусъ, тангенсъ и котангенсъ тупого угла оказались тоже отрицательными.

**11. Правило Декарта.** — Векторы принято изображать графически прямыми линиями определенной длины и направленія; такимъ образомъ длина отръзка показываетъ величину вектора, а направленіе — знакъ вектора. Поэтому необходимо установить, какія направленія считать положительными и какія — отрицательными. Знаменитый математикъ *Рене Декартъ*, творецъ Аналитической Геометріи (1637 г.), далъ слѣдующее правило, которому присвоено его имя: *если будемъ разсматривать на какой-нибудь линіи, прямой или кривой, различныя разстоянія отъ какой-нибудь постоянной точки, принимаемой за начало, то разстоянія, находящіяся по одну сторону начала, должны брать въ вычисленіяхъ со знакомъ «плюсъ», а по другую сторону его — со знакомъ «минусъ».*

**12. Измѣреніе прямыхъ отръзковъ и дугъ окружности.** — Выборъ начала и положительнаго направленія зависитъ всецѣло отъ насъ; тогда направленіе, противоположное выбранному, будетъ отрицательнымъ. Но при этомъ можетъ создаться нежелательная путаница, такъ какъ произвольно выбранныя системы направленій легко могутъ быть противорѣчивыми; по-



Черт. 3.

этому остановимся въ дальнѣйшихъ изысканіяхъ на системѣ, общепринятой со временъ Декарта и заключающейся въ слѣдующемъ. Два сопряженныхъ діаметра  $AA_1$  и  $BB_1$  (черт. 3), горизонтальный и вертикальный, пересекаются въ центрѣ круга радіуса  $R$ . Примемъ точку  $O$  за начало направленій и условимся *все разстоянія, отсчитываемыя отъ  $O$  вправо и вверхъ, принимать за положительныя,*

*а влѣво и внизъ—за отрицательныя.* Такъ, напримѣръ, отрѣзки  $OA$ ,  $OB$ ,  $OM$ —положительны, а равныя, но противоположныя имъ отрѣзки  $OA_1$ ,  $OB_1$ ,  $OM_1$  — отрицательны. Далѣе, для отсчета дугъ примемъ за начало точку  $A$ —конецъ положительнаго горизонтальнаго радіуса  $OA$ —и условимся отъ нея отсчитывать всѣ дуги. Тогда дуги, отсчитываемыя *вверхъ по окружности*, т. е. противъ часовой стрѣлки, будутъ *положительными*; напримѣръ, дуги  $AM$ ,  $AB$ ,  $AM_1B_1$  и т. п.; дуги же, отсчитываемыя по часовой стрѣлкѣ, т. е. *внизъ по окружности*, будутъ *отрицательными*; таковы дуги:  $AB_1$ ,  $AB_1M_1$  и т. п. Наконецъ, условимся считать положительными углы, измѣряемые положительными дугами, и отрицательными—углы, измѣряемые отрицательными дугами. Направленія же сторонъ угла мы будемъ считать положительными отъ вершины въ сторону ихъ расходимости и отрицательными—отъ вершины въ противоположную сторону. Такъ, напримѣръ, стороны  $OA$  и  $OM$  положительны, стороны же  $OA_1$  и  $OM_1$ —отрицательны, такъ какъ направленія двухъ послѣднихъ сторонъ противоположны направленіямъ первыхъ; если же мы возьмемъ уголъ  $AOM_1$ , измѣряемый дугою  $ABM_1$ , то стороны его  $OA$  и  $OM_1$  будутъ положительны, тогда какъ продолженіе стороны  $OM_1$ , т. е. отрѣзокъ  $OM$ , будетъ теперь отрицательнымъ.

13. Разсмотрѣнная нами система направленій называется *Декартова система координатъ*. Она даетъ возможность обобщить многіе геометрическіе вопросы, а главное—значительно упрощаетъ изученіе свойствъ гониометрическихъ функцій, позволяя ихъ величины представлять графически, наглядно.

14. Углы и ихъ функціи. Изъ предыдущихъ изслѣдованій нетрудно заключить, что уголъ есть величина, измѣняющаяся непрерывно и принимающая любое значеніе въ предѣлахъ отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ . Далѣе, три прямая; *наклонную*, т. е. подвижную сторону угла, *проэктію*, т. е. проэктію наклонной на неподвижное основаніе, и *перпендикуляръ*, опущенный изъ конца наклонной на основаніе, мы будемъ называть сторонами, замыкающими уголъ; тогда отношенія сторонъ, замыкающихъ уголъ, суть функціи угла. Эти функціи называются *гоніометрическими*—отъ слова «*γωνία*», т. е. уголъ; онѣ трансцендентны и періодичны. Разсмотрѣнныя нами тригонометрическія величины угловъ треугольника являются, слѣдовательно, частнымъ случаемъ гоніометрическихъ функцій, такъ какъ углы треугольника измѣняются только въ предѣлахъ отъ  $0^\circ$  до  $180^\circ$  и всегда положительны.

15. Гоніометрическія функціи дѣлятся на *круговыя* и *обратныя круговыя*, сообразно выбору независимой перемѣнной. Если уголъ принять за независимую перемѣнную, то отношенія замыкающихъ сторонъ будутъ функціями угла, такъ называемыми круговыми функціями; наоборотъ, если принять за независимую перемѣнную любое изъ упомянутыхъ отношеній, то уголъ будетъ его функціей, такъ называемой обратной круговой; такимъ образомъ мы видимъ, что гоніометрическія функціи представляютъ замѣчательный примѣръ *обратныхъ* функцій.

---

## Глава II. Общія свойства круговыхъ функцій.

**16. Опреѣленія.** Возьмемъ произвольный уголъ  $x$  и составимъ всѣ возможные соотношенія между замыкающими его сторонами. Всѣхъ такихъ соотношеній 6, а именно:

$$5) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{перпендикуляръ}}{\text{наклонная}}, \frac{\text{проекція}}{\text{наклонная}}, \frac{\text{перпендикуляръ}}{\text{проекція}}, \\ \frac{\text{проекція}}{\text{перпендикуляръ}}, \frac{\text{наклонная}}{\text{проекція}}, \frac{\text{наклонная}}{\text{перпендикуляръ}}. \end{array} \right.$$

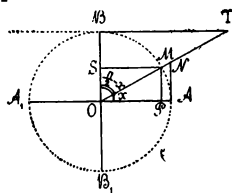
Первыя четыре отношенія намъ извѣстны изъ курса тригонометріи: это синусъ, косинусъ, тангенсъ и котангенсъ угла  $x$ . Пятое отношеніе называется секансъ (secans, сокращ. sec.) и шестое—косекансъ (cosecans, сокращ. cosec.) угла  $x$ . Такимъ образомъ мы устанавливаемъ слѣдующія опредѣленія шести круговыхъ функцій:

- 1., Отношеніе перпендикуляра къ наклонной есть синусъ,
- 2.,       »       проекціи къ наклонной есть косинусъ,
- 3.,       »       перпендикуляра къ проекціи есть тангенсъ,
- 4.,       »       проекціи къ перпендикуляру есть котангенсъ,
- 5.,       »       наклонной къ ея проекціи есть секансъ,
- 6.,       »       наклонной къ перпендикуляру есть косекансъ.

**17. Построеніе круговыхъ функцій.** Въ главѣ I-ой было уже упомянуто, что гониометрическія функціи

суть векторы. Дѣйствительно, при различныхъ величинахъ угловъ направленія замыкающихъ сторонъ могутъ быть и положительными и отрицательными, что, конечно, вліяетъ и на знаки функцій. Для того же, чтобы разсмотрѣть вопросъ о знакахъ всесторонне, мы воспользуемся представленіемъ круговыхъ функцій графически при помощи такъ называемыхъ гониометрическихъ линій.

Въ дальнѣйшемъ я буду все углы выражать въ радіальныхъ единицахъ; поэтому и уголъ  $x$ , лежащій въ 1-мъ квадрантѣ (черт. 4), выраженъ въ частяхъ радіана. Отложимъ на его сторонахъ произвольные



Черт. 4.

равные отрѣзки  $OA = OM$  и примемъ изъ за радіусъ  $R$  круга. Далѣе, проэктируя  $OM$  на  $OA$ , получимъ перпендикуляръ  $MP$  и проэктію  $OP$ , какъ и раньше. Согласно опредѣленіямъ круговыхъ функцій имѣемъ:

$$\sin x = \frac{MP}{R}, \quad \cos x = \frac{OP}{R}.$$

Такъ какъ  $R$ —величина постоянная для даннаго круга, то остальные двѣ прямыя— $MP$  и  $OP$ —могутъ быть выражены въ частяхъ  $R$ ; кромѣ того, мы примемъ  $R$  за произвольную единицу длины; тогда оба наши отношенія, представляющія собою  $\sin x$  и  $\cos x$ , можно графически представить въ видѣ прямыхъ  $MP$  и  $OP$ . Эти прямыя положительны, такъ какъ первая направлена вверхъ, а вторая—вправо отъ начала. Онѣ называются *гониометрическими линіями синуса и косинуса*.

Разсматривая остальные четыре отношенія:  $\frac{MP}{OP}$ ,  $\frac{OP}{MP}$ ,  $\frac{OM}{OP}$ ,  $\frac{OM}{MP}$ , мы видимъ, что  $R$  больше въ знаменателѣ не входитъ и поѣтому числителей ихъ нѣльзя непосредственно выразить въ частяхъ радіуса. Постараемся замѣнить эти отношенія другими, имъ равными, но со знаменателемъ  $R$ ; тогда новые числители представятъ собою гоніометрическія линіи остальныхъ 4-хъ функцій. Для этого построимъ при точкѣ  $A$  касательную къ окружности и продолжимъ ее до встрѣчи съ продолженной наклонной  $OM$  въ точкѣ  $N$ . Образовавшійся прямоугольный треугольникъ  $ONA$  подобенъ треугольнику  $OMP$ , слѣдовательно,  $\frac{MP}{OP} = \frac{AN}{OA}$  и  $\frac{OM}{OP} = \frac{ON}{OA}$ , т. е.:  $\operatorname{tg} x = \frac{AN}{R}$ ,  $\sec x = \frac{ON}{R}$ . Отсюда мы заключаемъ, что  $AN$  и  $ON$  суть гоніометрическія линіи тангенса и секанса; обѣ онѣ положительны, такъ какъ первая направлена вверхъ отъ начала  $A$ , а вторая—въ сторону расходимости угла. Наконецъ, проведемъ изъ  $M$  прямую  $MS$  параллельно основанію и при точкѣ  $B$  построимъ вторую касательную къ окружности; пресѣченіе этой касательной съ продолженной наклонной въ точкѣ  $T$  дастъ новый прямоугольный треугольникъ  $OBT$ . Отношенія  $\frac{OP}{MP}$  и  $\frac{OM}{MP}$  замѣняемъ—въ силу равенства треугольниковъ  $OMP$  и  $OSM$ —отношеніями  $\frac{SM}{OS}$  и  $\frac{OM}{OS}$ ; изъ подобія же треугольниковъ  $OSM$  и  $OAT$  находимъ:

$$\frac{SM}{OS} = \frac{BT}{OB} \text{ и } \frac{OM}{OS} = \frac{OT}{OB};$$

отсюда заключаемъ, что  $\operatorname{ctg} x = \frac{BT}{R}$ ,  $\operatorname{cosec} x = \frac{OT}{R}$ , т. е.  $BT$  и  $OT$  суть гониометрическія линіи котангенса и косеканса; обѣ онѣ положительны, согласно предыдущему. Такимъ образомъ мы нашли вгониометрическихъ линій, представляющихъ собою графически величины 6-ти круговыхъ функцій.

18. Изъ предыдущаго непосредственно выводятся правила и указанія, дающія возможность построить всѣ гониометрическія линіи для даннаго угла. Замѣтимъ сперва, что подвижная наклонная всегда проектируется либо на неподвижное основаніе  $OA$ , либо на его продолженіе  $OA_1$ , что зависитъ отъ положенія этой наклонной; далѣе, касательныя, служащія для откладыванія на нихъ величинъ тангенса и котангенса, всегда строятся при точкахъ  $A$  и  $B$  и могутъ продолжаться: первая—вверхъ и внизъ, а вторая—вправо и влѣво отъ точекъ касанія  $A$  и  $B$  (черт. 4); мы будемъ называть ихъ первой касательной и второй касательной. Послѣ этихъ замѣчаній можно дать слѣдующія опредѣленія гониометрическихъ линій:

1. Длина перпендикуляра есть гониометрическая линія синуса.
2. » проэкции есть гониометрическая линія косинуса.
3. Отрѣзокъ первой касательной, заключенный между точкой касанія и продолженной наклонной, есть гониометрическая линія тангенса.
4. второй касательной, заключенный между точкой касанія и продолженной наклонной, есть гониометрическая линія котангенса.

5. Отрѣзокъ продолженной наклонной, заключенный между вершиною угла и первою касательною, есть гониометрическая линія секанса.

6. » продолженной наклонной, заключенный между вершиною угла и второю касательною, есть гониометрическая линія косеканса.

19. **Синусъ-зерсусъ и косинусъ-зерсусъ.**—Разсматривая отрѣзки прямыхъ, проведенныхъ на чертежѣ 4-мъ, мы видимъ, что всѣ они имѣютъ свои названія, кромѣ двухъ:  $PA$  и  $SB$ . Нетрудно видѣть, что и эти два отрѣзка, при данномъ радіусѣ  $R$ , тоже вполне опредѣляютъ величину угла  $x$ ; зная, напримѣръ,  $PA$ , можно возставить изъ точки  $P$  перпендикуляръ  $PM$  и найти такимъ образомъ линію синуса; точно также, зная  $SB$ , можно изъ точки  $S$  провести прямую  $SM$  параллельно основанію и найти такимъ образомъ линію косинуса (такъ какъ  $SM$  по величинѣ и направленію равна  $OP$ ). Для общности изслѣдованія эти два отрѣзка приняли за гониометрическія линіи двухъ новыхъ круговыхъ функцій, такъ что:

$$6) \quad \frac{PA}{R} = \sin v \, x, \quad \frac{SM}{R} = \cos v \, x.$$

Первая изъ этихъ функцій, служащая для нахождения синуса, называется синусъ-версусъ (sinus-versus, сокр.  $\sin v$ ); другая, служащая для нахождения косинуса, называется косинусъ-версусъ (cosinus-versus, сокр.  $\cos v$ ). Этими функціями пользовались часто арабскіе и индусскіе математики; въ настоящее время онѣ сохраняютъ только историческій интересъ и очень

рѣдко употребляются въ вычисленіяхъ (можно встрѣтить въ англійскихъ руководствахъ).

**Примѣчаніе.** Во многихъ руководствахъ названія круговыхъ функцій присвоены также и ихъ гониометрическимъ линіямъ; поэтому авторы упомянутыхъ руководствъ, говоря «синусъ», «тангенсъ» и т. п., подразумѣваютъ подъ этимъ то отношенія, то линіи, сообразно съ обстоятельствами. Подобная двойственность всегда ведетъ къ нежелательнымъ результатамъ въ смыслѣ яснаго усвоенія основъ гониометріи учащимися.

**20. Функціи дополнительнаго угла.** Вернемся къ чертежу 4. Уголъ  $MOB$  является дополнительнымъ по отношенію къ углу  $x$ , слѣдовательно, онъ равенъ  $\frac{\pi}{2} - x$ . Такъ какъ діаметръ  $BB_1$  имѣетъ постоянное направленіе, то мы можемъ подвижную наклонную  $OM$  проэктировать на основаніе  $OB$ ; тогда, согласно даннымъ опредѣленіямъ, находимъ, что перпендикуляръ  $MS$  есть гониометрическая линія синуса угла  $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ , проэктіа  $OS$  есть гониометрическая линія косинуса угла  $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ . Съ другой стороны имѣемъ равенства:  $MS = OP$ ,  $OS = MP$ . Итакъ,  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ . Далѣе, касательная  $BT$  есть гониометрическая линія тангенса угла  $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ , продолженная наклонная  $OT$  есть гониометрическая линія секанса угла  $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ; но въ то же время эти прямыя суть гониометрическія линіи котангенса угла  $x$  и косеканса угла  $x$ , поэтому:  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$  и

$\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cosec} x$ . Наконецъ, прямыя  $AN$  и  $ON$  являются одновременно гоніометрическими линиями котангенса и косеканса угла  $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$  и тангенса и секанса угла  $x$ , такъ что  $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$ ,  $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$ . Такимъ образомъ мы приходимъ къ слѣдующимъ равенствамъ, устанавливающимъ зависимость между круговыми функціями взаимно-дополнительныхъ угловъ (о положительномъ направленіи всѣхъ разсмотрѣнныхъ здѣсь гоніометрическихъ линій было уже упомянуто выше).

$$7) \quad \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x, \\ \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cosec} x, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x, \\ \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x. \end{cases}$$

21. Формулы (7) были нами установлены совершенно независимымъ путемъ въ 1-ой части для угловъ треугольника. Замѣтимъ кстати, что онѣ могутъ быть получены изъ основныхъ опредѣленій, подобно формуламъ тригонометріи. На основаніи изложеннаго мы будемъ называть косинусъ, котангенсъ и косекансъ дополнительными функціями угла  $x$ , а синусъ, тангенсъ и секансъ—дополнительными функціями угла  $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ .

22. Функціи угловъ II-го квадранта. Уголь, лежащій во II-мъ квадрантѣ, можно образовать двояко, какъ



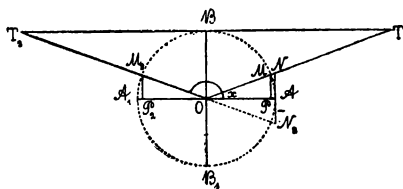
тупого угла есть величина отрицательная, а косеканс—положительная. Такимъ образомъ мы опредѣлили знаки всѣхъ 6-ти функцій тупого угла  $\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ .

23. Найдемъ теперь зависимость между функціями угловъ  $\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$  и  $x$ . Для этого рассмотримъ треугольники  $OM_1P_1$ ,  $OMP$ ,  $ON_1A$ ,  $OBT$ ,  $OT_1B$ ,  $ONA$ . Изъ равенства первого и второго выводимъ:  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ ; равенство 3-го и 4-го даетъ:

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x$ ,  $\sec\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{cosec} x$ ; наконецъ изъ равенства двухъ послѣднихъ треугольниковъ заключаемъ, что:  $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sec x$ . Итакъ мы пришли къ новымъ формуламъ:

$$8) \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x, \\ \sec\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{cosec} x, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sec x. \end{array} \right.$$

24. Функція тупого угла второго вида можно построить при помощи тѣхъ же соображеній, что и раньше; вопросъ объ ихъ



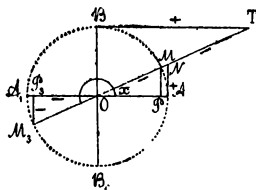
Черт. 6.

знакахъ мы уже разсмотрѣли; остается найти зависимость между ними и функциями угла  $x$ . Для этого обратимся къ чертежу 6-му и разсмотримъ 3 пары равныхъ треугольниковъ:  $OM_2P_2$  и  $OMP$ ;  $OAN_2$  и  $OAN$ ;  $OBT_2$  и  $OBT$ , что даетъ:

$$9) \left\{ \begin{array}{l} \sin(\pi - x) = \sin x, \quad \operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x, \\ \sec(\pi - x) = -\sec x, \\ \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x, \\ \operatorname{cosec}(\pi - x) = \operatorname{cosec} x. \end{array} \right.$$

Формулы (8) и (9) были получены нами въ тригонометріи, хотя и примѣнялись только къ угламъ треугольника.

**25. Функции угловъ III-го квадранта.** Подобно предыдущему разсмотримъ два угла:  $(\pi + x)$  и  $(\frac{3\pi}{2} - x)$ , лежащіе въ III-мъ квадрантѣ. Пусть  $\angle AOM = x$ ,



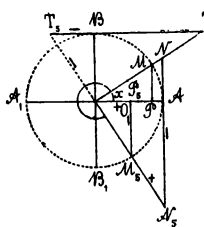
Черт. 7.

$\angle AOM_3 = \pi + x$  (черт. 7). Построивъ всѣ гониометрическія линіи обоихъ угловъ, замѣчаемъ, что линіи тангенса и котангенса этихъ угловъ совпадаютъ по величинѣ и направленію, а линіи секанса и косеканса равны

по величинѣ и противоположны по направленію. Что же касается остальныхъ двухъ функций, то синусъ и косинусъ угла III-й четверти отрицательны; изъ равенства же треугольниковъ  $OP_3M_3$  и  $OMP$  находимъ, что  $\sin(\pi + x) = -\sin x$  и  $\cos(\pi + x) = -\cos x$ . Итакъ, синусъ, косинусъ, секансъ и косекансъ угловъ III-го квадранта отрицательны, а тангенсъ и котангенсъ положительны.



27. Функции углов IV-го квадранта. Пусть  $\angle AOM_5 = \frac{3\pi}{2} + x$ ,  $\angle AOM = x$  (черт. 9). Построив все гониометрическия линии обоихъ угловъ, мы видимъ, что



Черт. 9.

линии косинуса и секанса угла  $\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$  положительны, а линии остальныхъ функций того же угла отрицательны. Слѣдовательно, косинусъ и секансъ угловъ IV квадранта положительны, а синусъ, тангенсъ, котангенсъ и косекансъ — отрицательны. Далѣе, изъ равенства треугольниковъ  $OP_5M_5$  и  $OMP$  выводимъ:  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$ ,  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$ ; точно также, равенство треугольниковъ  $OAN_5$  и  $OBT$  даетъ:  $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x$ ,  $\sec\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \operatorname{cosec} x$ . Наконецъ изъ равенства треугольниковъ  $OBT_5$  и  $ONA$  находимъ:

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg} x, \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sec x.$$

Итакъ:

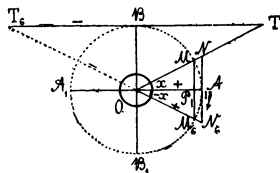
$$12) \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x, \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{ctg} x, \\ \sec\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \operatorname{cosec} x, \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x, \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\sec x. \end{array} \right.$$

28. Послѣдній уголъ, который намъ предстоитъ разсмотрѣть, это  $\angle AOM_6 = 2\pi - x$  (черт. 10). Построивъ гониометрическия линии всѣхъ функций угловъ

$(2\pi - x)$  и  $x$  мы замѣчаемъ, что линія косинуса для нихъ общая; далѣе, линіи секансовъ равны по величинѣ и направленію, а остальные четыре линіи разнятся только въ знакахъ. Поэтому:

$$13) \begin{cases} \sin (2\pi - x) = -\sin x, & \operatorname{tg} (2\pi - x) = -\operatorname{tg} x, \\ \sec (2\pi - x) = \sec x, \\ \cos (2\pi - x) = \cos x, & \operatorname{ctg} (2\pi - x) = -\operatorname{ctg} x, \\ \operatorname{cosec} (2\pi - x) = -\operatorname{cosec} x. \end{cases}$$

**29. Функціи отрицательныхъ угловъ.** До сихъ поръ всѣ разсмотрѣнные нами углы были положительными; нетрудно найти и функціи угловъ отрицательныхъ. Для этого возьмемъ уголъ, опирающійся на отрицательную дугу  $AM_6$  (черт. 10) и равный по абсолютной величинѣ углу  $АОМ$ ; обозначимъ его черезъ « $-x$ ». Построивъ гониометрическія линіи функцій угла  $(-x)$ , увидимъ, что онѣ совершенно совпадаютъ съ соотвѣтственными гониометрическими линіями угла  $(2\pi - x)$ ; причина такого явленія понятна: разность между углами  $(2\pi - x)$  и  $(-x)$  составляетъ цѣлую окружность:



Черт. 10.

$$(2\pi - x) - (-x) = 2\pi - x + x = 2\pi,$$

а мы уже знаемъ изъ главы I-ой, что углы, разнящіеся на цѣлое число окружностей, имѣютъ общія стороны; это обнаруживается и изъ чертежа. Если же гониометрическія линіи функцій двухъ угловъ соотвѣтственно равны другъ другу, то равны и сами

функцій. Поэтому изъ формулъ (13) сейчасъ же выводятся искомыя формулы:

$$14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin(-x) = -\sin x, \quad \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \\ \sec(-x) = \sec x, \\ \cos(-x) = \cos x, \quad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x \\ \operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x. \end{array} \right.$$

**Примѣчаніе.** Взятый нами уголъ  $x < \frac{\pi}{2}$ . Нетрудно видѣть, что всѣ формулы (7—14) не измѣнятся, если мы  $x$  замѣнимъ углами:  $2\pi + x$ ,  $4\pi + x$ ,  $6\pi + x$ , ...,  $2\pi n + x$ .

**30. Мнемоническія правила для формулъ приведенія.** Предыдущія изслѣдованія приводятъ насъ къ весьма важнымъ заключеніямъ, касающимся вычисленія круговыхъ функцій. Именно, какова бы ни была величина угла  $x$ , мы можемъ функціи этого угла замѣнить функціями угла острого, согласно формуламъ (7—13) и положительнаго, согласно формуламъ (14). Если этотъ уголъ  $x$  превышаетъ  $2\pi$ , то мы сначала приводимъ его къ углу первой окружности, а затѣмъ продолжаемъ, какъ и раньше. Такимъ образомъ вопросъ о вычисленіи функцій любого угла приводитъ къ вычисленію угловъ острыхъ, т. е. лежащихъ въ I-мъ квадрантѣ; поэтому и сами формулы (7—14) получили названіе: «формулы приведенія къ I-му квадранту».

Несмотря на обиліе этихъ формулъ ихъ легко запомнить, если пользоваться двумя мнемоническими правилами, которыя я сейчасъ укажу. Одно изъ нихъ касается величинъ функцій, другое — ихъ знаковъ. Подъ словомъ «четверть» подразумѣвается  $\frac{\pi}{2}$ .

**Первое мнемоническое правило.** Если сумма или разность двух угловъ составляетъ четное число четвертей, то функции этихъ угловъ по абсолютной величинѣ равны; если же число четвертей нечетное, то функции одного угла по абсолютной величинѣ равны соответственнымъ дополнительнымъ функциямъ другого угла.

**Второе мнемоническое правило (правило Достора).** Круговыя функции попарно положительны: синусъ и косекансъ — въ I-мъ и II-мъ квадрантахъ, косинусъ и секансъ — въ I-мъ и IV-мъ квадрантахъ, тангенсъ и котангенсъ — въ I-мъ и III-мъ квадрантахъ. Въ соответственныхъ остальныхъ квадрантахъ эти пары отрицательны.

31. Оба правила вытекаютъ непосредственно изъ формулъ приведенія, какъ результатъ ихъ обобщенія. Слѣдуетъ замѣтить, что первое правило примѣняется не только къ угламъ, одинъ изъ коихъ лежитъ въ I-мъ квадрантѣ, но и ко всякой парѣ угловъ, если только сумма или разность послѣднихъ удовлетворяетъ высказаннымъ въ этомъ правилѣ условіямъ. Слѣдующіе примѣры покажутъ намъ, какъ пользоваться данными правилами въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ..

**Примѣръ 1.** Найти функции угла  $\frac{5\pi}{3}$ .

Прежде всего замѣчаемъ, что  $\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 2\pi$ , слѣдовательно:  $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$ , т. е. данный уголъ лежитъ въ IV-мъ квадрантѣ. Функции этого угла можно замѣнить функциями угла  $\frac{\pi}{3}$ , а такъ какъ сумма угловъ  $\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$  равна  $2\pi = 4 \frac{\pi}{2}$ , т. е. составляетъ 4 четверти,

то функціи обоихъ угловъ по величинѣ равны. Кромѣ того, въ IV-мъ квадрантѣ положительны только косинусъ и секансъ, остальные же четыре функціи отрицательны. Все это вмѣстѣ приводитъ насъ къ слѣдующимъ равенствамъ:

$$\begin{aligned}\sin \frac{5\pi}{3} &= -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}; & \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} &= -\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \\ &= -\sqrt{3}; & \sec \frac{5\pi}{3} &= \sec \frac{\pi}{3}; & \cos \frac{5\pi}{3} &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}; \\ \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{3} &= -\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; & \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{3} &= \\ &= -\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Величины  $\sec \frac{\pi}{3}$  и  $\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3}$  намъ еще неизвѣстны, такъ какъ не установлена связь между двумя новыми функціями и четырьмя прежними.

**Примѣръ 2.** Найти зависимость между функціями угловъ  $\frac{5\pi}{6}$  и  $\frac{2\pi}{3}$ .

Оба данныхъ угла меньше  $\pi$  и больше  $\frac{\pi}{2}$ , слѣдовательно, оба лежатъ во II-мъ квадрантѣ; поэтому знаки ихъ функцій одинаковы. Далѣе, сумма угловъ составляетъ  $3\frac{\pi}{2}$ , т. е. нечетное число четвертей; поэтому къ нимъ примѣнимо правило первое и, слѣдовательно, функціи перваго угла равны соотвѣтственнымъ функціямъ втораго угла. Итакъ:

$$\begin{aligned}\sin \frac{5\pi}{6} &= \cos \frac{2\pi}{3}; & \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} &= \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3}; & \sec \frac{5\pi}{6} &= \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3}; \\ \cos \frac{5\pi}{6} &= \sin \frac{2\pi}{3}; & \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} &= \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}; & \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6} &= \sec \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

**Примѣръ 3.** Определить косинусъ угла въ  $92^{\circ} 14' 37'', 04$ .

Имѣемъ:  $925^{\circ} 14' 37'',04 = 2.360^{\circ} + (180^{\circ} + 25^{\circ} 14' 37'',04)$ , поэтому:  $\cos 925^{\circ} 14' 37'',04 = \cos (\pi + 25^{\circ} 14' 37'',04)$ . Далѣе, разность угловъ  $(\pi + 25^{\circ} 14' 37'',04)$  и  $25^{\circ} 14' 37'',04$  равна  $\pi$ , т. е. составляетъ четное число четвертей, поэтому абсолютныя величины косинусовъ этихъ угловъ равны; а такъ какъ уголъ  $(\pi + 25^{\circ} 14' 37'',04)$  лежитъ въ III-мъ квадрантѣ, то косинусъ его отрицателенъ. Итакъ:

$$\cos 925^{\circ} 14' 37'',04 = -\cos 25^{\circ} 14' 37'',04.$$

**32. Общее заключеніе.** На основаніи изложеннаго выше легко прійти къ слѣдующимъ заключеніямъ:

I. Круговую функцію любого угла можно замѣнить одноименной функціей угла, лежащаго между 0 и  $\frac{\pi}{2}$ .

II. Круговую функцію любого угла можно замѣнить функціей (одноименной или дополнительной) угла, лежащаго между 0 и  $\frac{\pi}{4}$ .

Возможность обѣихъ замѣнъ вытекаетъ непосредственно изъ того, что углы всѣхъ квадрантовъ можно представить въ двухъ видахъ, а именно:

|                 |                                   |
|-----------------|-----------------------------------|
| I-ый квадрантъ: | $x, \frac{\pi}{2} - x;$           |
| II-ой           | » $\frac{\pi}{2} + x, \pi - x;$   |
| III-ій          | » $\pi + x, \frac{3\pi}{2} - x;$  |
| IV-ый           | » $\frac{3\pi}{2} + x, 2\pi - x.$ |

Одинъ изъ этихъ видовъ дастъ при приведеніи всегда функцію, одноименную съ данной, что под-

тверждаетъ первое заключеніе. Если же «приведенный» уголъ окажется больше  $\frac{\pi}{4}$ , то его можно всегда замѣнить дополнительнымъ угломъ, который будетъ уже *меньше*  $\frac{\pi}{4}$ , и саму функцію измѣнить на дополнительную; это подтверждаетъ второе заключеніе.

При различныхъ вычисленіяхъ выгоднѣе пользоваться вторымъ способомъ приведенія, такъ какъ таблицы функцій составлены для угловъ, лежащихъ между 0 и  $\frac{\pi}{4}$ .

## УПРАЖНЕНІЯ.

1. Найти круговыя функціи угловъ:  $215^\circ 20' 7''$ ;  $773^\circ 44' 23''$ ;  $-1490^\circ 28' 6''$ , 04;  $\frac{8\pi}{5}$ ;  $11\frac{1}{3}\pi$ ;  $-7\frac{2}{3}\pi$ ;  $25\pi$ .

Найти:  $\sin 22$ ,  $\cos 11$ ,  $\operatorname{tg} 44$ .

Упростить выраженія:

$$2. \frac{\operatorname{ctg} 157^\circ \operatorname{ctg} 23^\circ}{\operatorname{tg} 49^\circ \sin 131^\circ}; \frac{\cos 117^\circ \operatorname{tg} 283^\circ}{\sec 318^\circ \sin 340^\circ}; \frac{\operatorname{cosec} 300^\circ \sin 120^\circ}{\cos (-750^\circ)}.$$

$$3. \sin\left(\frac{1}{2}\pi + a\right) \cdot \cos(\pi - a) + \cos(a + 90^\circ) \cdot \sin(\pi - a).$$

$$4. \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - a\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + a\right)}{\sin\left(a + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg}(-a)} - \frac{\sin\left(a + \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(a - \frac{3\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)}.$$

$$5. \frac{\sin(270^\circ - a) \cdot \operatorname{tg}(\pi - b)}{\operatorname{tg}(\pi + b) \cdot \cos(\pi - a)} - \frac{\operatorname{ctg}\left(a - \frac{1}{2}\pi\right) \cdot \sin(b - 90^\circ)}{\cos(\pi - b) \cdot \operatorname{tg}(-a)}.$$

Вычислить выражения:

6.  $\frac{a \cdot \cos 0^\circ - b \cdot \sec \pi}{\cos 90^\circ + b \cdot \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{2}} + \frac{a \cdot \sec 2\pi - b \cdot \cos 2\pi}{(a+b) \cdot \cos 4\pi - 2a \cdot \sin \pi}.$
7.  $a^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + 2ab \cdot \cos \pi + b^2 \cdot \sec 4\pi \dots$  при  $a=3, b=2.$
8.  $\frac{a^3 + b^3}{a+b} \sin x - (a-b)^2 \cos \left(x - \frac{1}{2} \pi\right) \dots$  при  $x = \frac{\pi}{2}.$
9.  $2 \sin (x - 90^\circ) + \cos (x - \pi) - \sin (x - 2\pi) \dots$  при  $x = \frac{\pi}{4}.$
10.  $4 \cos \left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) - 3 \operatorname{tg} (-x + 60^\circ) \dots$  при  $x = -\frac{4}{3} \pi.$
11.  $\frac{\operatorname{tg} 3x - 5 \operatorname{ctg} (x + 270^\circ)}{8 \sin (75^\circ + x)} \dots$  при  $x = 225^\circ.$
12.  $\left\{ \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \pi + 3x\right) + \sec (x + 225^\circ) \right\}^{-1} \dots$  при  $x = \frac{3}{4} \pi.$

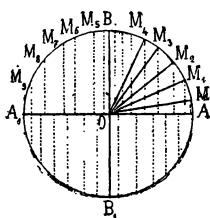
Показать справедливость формуль:

13.  $\cos \left(\frac{1}{2} \pi + a\right) \cos (\pi - a) + \sin \left(\frac{1}{2} \pi + a\right) \sin (\pi + a) = 0.$
14.  $(a+b)^2 \sec (2\pi - m) + 4ab \cdot \operatorname{cosec} (270^\circ - m) =$   
 $= (a-b)^2 \operatorname{cosec} \left(m + \frac{1}{2} \pi\right).$
15.  $\sin^2 (\pi - a) + \sin^2 \left(\frac{1}{2} \pi + a\right) = \sec^2 (2\pi - a) -$   
 $- \operatorname{ctg}^2 \left(a - \frac{3}{2} \pi\right).$

**33. Измѣненіе круговыхъ функцій.** Мы видѣли, что при различныхъ положеніяхъ сторонъ угла гониометрическія линіи его функцій тоже различны; но въ то время какъ уголъ измѣняется въ постоянномъ направленіи, напримѣръ, возрастаетъ въ предѣлахъ отъ

0 до  $+\infty$ , гониометрическія лінії, а, слѣдовательно, и круговыя функціи измѣняются совершенно своеобразно. Разсмотримъ поэтому измѣненіе трехъ главныхъ функцій: синуса, тангенса и секанса.

**34. Измѣненіе синуса.** Согласно опредѣленію, гониометрическая лінія синуса есть длина перпендикуляра, опущеннаго изъ конца подвижной наклонной на основаніе; такъ какъ конецъ этой наклонной скользитъ по окружности круга даннаго радіуса  $R$  (черт. 11),



Черт. 11

а положеніе основанія неизмѣнно, то мы можемъ а priori сказать, что длина перпендикуляра есть число конечное, т. е. синусъ всегда величина конечная и не превышающая по абсолютному значенію единицы. Къ этому насъ приведутъ сейчасъ же и болѣе детальные изслѣдованія.

Наименьшее значеніе положительнаго угла есть 0; тогда обѣ стороны совпадаютъ, длина перпендикуляра тоже равна 0 и  $\sin 0 = 0$ . При возрастаніи угла подвижная наклонная  $OM$  принимаетъ рядъ положеній:  $OM_1$ ,  $OM_2$ ,  $OM_3$ ,  $OM_4$ , и, наконецъ,  $OB$ . Въ то же время длина перпендикуляра становится все больше, такъ какъ нашъ перпендикуляръ есть половина хорды, а хорда съ приближеніемъ къ центру возрастаетъ. При углѣ  $\frac{\pi}{2}$  наклонная  $OM$  принимаетъ положеніе  $OB$ , т. е. сливается съ вертикальнымъ радіусомъ; перпендикуляръ въ свою очередь сливается съ тѣмъ же радіусомъ и, слѣдовательно, равенъ  $R$ ; тогда синусъ равенъ дроби  $\frac{R}{R}$ , т. е. обращается въ 1.

Итакъ, синусъ въ I-мъ квадрантѣ есть функція возрастающая, положительная, конечная и принимающая послѣдовательныя значенія отъ 0 до 1.

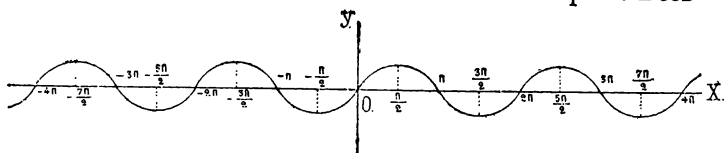
Во II-мъ квадрантѣ уголъ продолжаетъ возрастать отъ  $\frac{\pi}{2}$  до  $\pi$ ; подвижная наклонная  $OM$  принимаетъ рядъ новыхъ положеній:  $OM_5, OM_6, OM_7, OM_8, OM_9$  и  $OA_1$ . вмѣстѣ съ тѣмъ перпендикуляръ удаляется отъ центра и, слѣдовательно, убываетъ, оставаясь положительнымъ. При углѣ  $\pi$  наклонная  $OM$  сливается съ горизонтальнымъ радіусомъ  $OA_1$  и длина перпендикуляра равна 0. Итакъ синусъ во II-мъ квадрантѣ есть функція убывающая, положительная, конечная и принимающая послѣдовательныя значенія отъ 1 до 0.

Дальнѣйшія изслѣдованія дадутъ намъ прежніе результаты: именно, въ III-мъ квадрантѣ синусъ возрастаетъ отъ 0 до 1 (по абсолютной величинѣ) и отрицателенъ по знаку; въ IV-мъ квадрантѣ синусъ убываетъ отъ 1 до 0 (по абсолютной величинѣ) и тоже отрицателенъ по знаку. Итакъ, при измѣненіи независимой переменнѣй  $x$  отъ 0 до  $2\pi$  синусъ измѣняется отъ 0 до 0, переходя черезъ значенія  $+1$  и  $-1$ . Поэтому говорятъ, что синусъ измѣняется отъ  $-1$  до  $+1$ , такъ какъ эти два значенія для него составляютъ maximum и minimum.

При возрастаніи угла  $x$  въ предѣлахъ второй окружности, отъ  $2\pi$  до  $4\pi$ , синусъ будетъ измѣняться совершенно такъ же, какъ и раньше. Слѣдовательно, при измѣненіи независимой переменнѣй  $x$  въ предѣлахъ отъ 0 до  $+\infty$ , синусъ колеблется постоянно въ предѣлахъ отъ  $-1$  до  $+1$ . То же самое можно

заклучить и относительно синусовъ отрицательныхъ угловъ: разница только въ знакахъ. Итакъ мы пришли къ слѣдующему выводу: при измѣненіи независимой переменѣйной  $x$  отъ  $-\infty$  до  $+\infty$  синусъ измѣняется отъ  $-1$  до  $+1$ .

**35. Графика синуса.** Для бѣльшей наглядности представимъ законъ измѣненія синуса графически, пользуясь данными «Аналитической Геометріи». Возь-



Черт. 12.

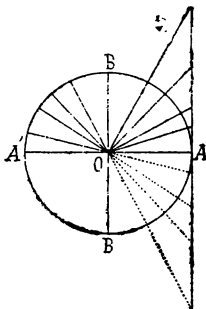
мемъ прямоугольную систему координатъ (черт. 12) и на оси  $OX$  будемъ откладывать значенія независимой переменѣйной  $x$ , т. е. углы:  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \frac{7\pi}{2}, 4\pi, \frac{9\pi}{2}, \dots$  Тогда на оси  $OY$  отложатся соотвѣтственные значенія  $y = \sin x$ , а именно:  $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots$  Построивъ въ соотвѣтствующихъ точкахъ оси  $X$ -овъ данныя значенія ординатъ, найдемъ непрерывную кривую, выражающую собою законъ измѣненія синуса. Эта кривая носитъ названіе синусоиды; она безконечна и состоитъ изъ равныхъ, чередующихся съ собою, положительныхъ и отрицательныхъ дугъ, расположенныхъ симметрично относительно оси абсциссъ по обѣ стороны начала.

**36. Измѣненіе тангенса.** Пусть уголъ  $x$  измѣняется отъ  $0$  до  $\frac{\pi}{2}$ ; тогда гониометрическія линіи его тангенса представляются отрѣзками первой касательной (черт. 13). При  $x=0$  касательная равна  $0$  и  $\operatorname{tg} 0=0$ ; при

возрастаніи угла  $x$  возрастает и касательная, такъ какъ она заключена между сторонами угла, которыя все болѣе расходятся. Когда же уголь  $x$  сдѣлается равнымъ  $\frac{\pi}{2}$ , то наклонная и касательная будутъ параллельными; слѣдовательно, точка ихъ встрѣчи лежитъ въ безконечно далекомъ разстояніи отъ точки 0. По-

этому говорятъ, что  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty$ ,

т. е. величина его безконечно велика, оставаясь въ то же время положительной. Съ другой стороны, тангенсъ во II-мъ квадрантѣ отрицателенъ и по абсолютной величинѣ уменьшается отъ безконечности до нуля, что непосредственно слѣдуетъ изъ чертежа. Если же уголь



Черт. 13.

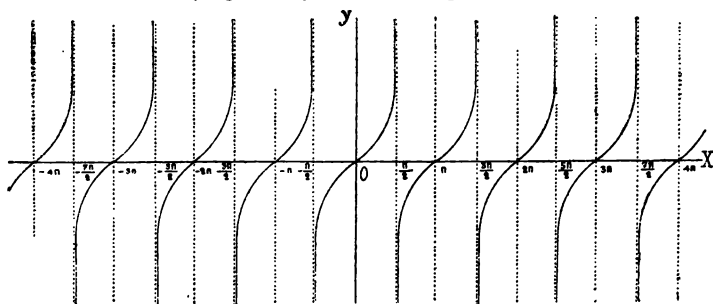
весьма мало превышаетъ  $\frac{\pi}{2}$ , то тангенсъ его очень великъ и отрицателенъ; поэтому при приближеніи угла къ  $\frac{\pi}{2}$  со стороны II-го квадранта тангенсъ все возрастаетъ и, въ предѣлѣ, принимаетъ безконечно-большое отрицательное значеніе, т. е.  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = -\infty$ .

Итакъ, для угла  $\frac{\pi}{2}$  тангенсъ имѣетъ два значенія:  $+\infty$  и  $-\infty$ . Обыкновенно ихъ соединяють вмѣстѣ и пишутъ:  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \pm \infty$ .

Во II-мъ квадрантѣ тангенсъ уменьшается и при  $x = \pi$  имѣемъ  $\operatorname{tg} \pi = 0$ . Въ III-мъ квадрантѣ тангенсъ положителенъ и возрастаетъ отъ 0 до  $\pm \infty$ , какъ и въ I-мъ; въ IV-мъ—отрицателенъ и убываетъ отъ

$\pm\infty$  до 0, какъ и во II-мъ. Слѣдовательно,  $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{2} = \pm\infty$ ,  $\operatorname{tg} 2\pi = 0$ . Итакъ, тангенсъ измѣняется одинаково какъ въ I-мъ, такъ и во II-мъ полукругѣ. Далѣе, при возрастаніи угла  $x$  въ предѣлахъ второй, третьей и т. д. окружностей, тангенсъ будетъ измѣняться совершенно такъ же и въ той же послѣдовательности. Такимъ образомъ мы приходимъ къ заключенію: при измѣненіи независимой переменнѣй  $x$  отъ  $-\infty$  до  $+\infty$  тангенсъ измѣняется отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ .

**37. Графика тангенса.** Подобно синусу, измѣненія Тангенса изображаются графикой, носящей названіе Тангенсоиды (черт. 14). Для построенія ея отклады-



Черт. 14.

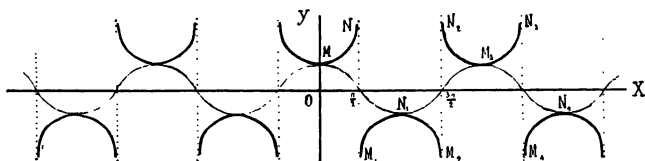
ваемъ на оси X-овъ отъ начала координатъ вправо и влѣво отрѣзки, равные  $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}$  и т. д. Тогда послѣдовательныя значенія тангенса образуютъ рядъ кривыхъ линій, пересѣкающихъ ось X-овъ въ точкахъ  $0, \pi, 2\pi, \dots, -\pi, -2\pi, \dots$ , и приближающихся сколь угодно близко къ прямымъ, параллельнымъ оси Y-овъ и проходящимъ черезъ точки:  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \dots$ . Этихъ вѣтвей безчисленное множество,

и всѣ онѣ симметричны относительно координатныхъ осей.

**38. Измѣненіе секанса.** Гоніометрическая линія секанса изображается отрѣзкомъ сѣкущей, заключеннымъ между началомъ 0 и первой касательной. При  $x=0$  этотъ отрѣзокъ равенъ  $R$ , т. е. онъ получаетъ наименьшее значеніе; поэтому  $\sec 0 = 1$ . Далѣе, при возрастаніи  $x$  (черт. 13) возрастаетъ и секансъ, оставаясь положительнымъ въ предѣлахъ I-го квадранта, какъ это слѣдуетъ изъ чертежа. При  $x = \frac{\pi}{2}$  линія секанса становится параллельной линіи тангенса, поэтому точка ихъ пересѣченія удаляется въ бесконечность. Итакъ,  $\sec \frac{\pi}{2} = +\infty$ . Но если мы будемъ приближать  $x$  къ  $\frac{\pi}{2}$  со стороны II-го квадранта, то  $\sec \frac{\pi}{2} = -\infty$ , такъ какъ во II-мъ квадрантѣ секансъ отрицателенъ; слѣдовательно,  $\sec \frac{\pi}{2} = \pm\infty$ . Далѣе, во II-мъ квадрантѣ секансъ убываетъ отъ  $\pm\infty$  до  $-1$ , т. е.  $\sec \pi = -1$ ; въ III-мъ — секансъ возрастаетъ отъ  $-1$  до  $+\infty$  и въ IV-мъ — убываетъ отъ  $+\infty$  до  $1$ . Слѣдовательно,  $\sec \frac{3\pi}{2} = -\infty$ ,  $\sec 2\pi = 1$ , и мы приходимъ къ заключенію: при измѣненіи независимой переменнѣй  $x$  отъ  $-\infty$  до  $+\infty$  секансъ измѣняется отъ  $-1$  до  $-\infty$  и отъ  $+\infty$  до  $+1$ .

**39. Графика секанса.** Изъ только что изложеннаго ясно, что измѣненіе секанса довольно своеобразно. Такъ, онъ принимаетъ бесконечно большія положительныя и отрицательныя значенія, но въ то же время не проходитъ черезъ нуль, уменьшаясь лишь до единицы. Графика секанса или секансоида выясняетъ

намъ это наглядно (черт. 15). При измѣненіи  $x$  отъ 0 до  $\frac{\pi}{2}$  секансъ измѣняется отъ  $+1$  до  $+\infty$  и представляется вѣтвію  $MN$ ; далѣе, при измѣненіи  $x$  отъ  $\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{3\pi}{2}$ , секансъ измѣняется отъ  $-\infty$  до  $-1$  и отъ  $-1$  до  $-\infty$  (вѣтви  $M_1N_1M_2$ ); наконецъ, при измѣненіи  $x$  отъ  $\frac{3\pi}{2}$  до  $2\pi$ , секансъ измѣняется отъ  $+\infty$  до  $+1$



Черт. 15.

(вѣтви  $N_2M_3$ ). Дальнѣйшія измѣненія секанса представятся соотвѣтственно тѣми же вѣтвями кривой; тоже самое относится и къ измѣненію секанса при отрицательныхъ значеніяхъ  $x$ . Итакъ, секансоида состоитъ изъ безконечнаго числа вѣтвей, попеременно положительныхъ и отрицательныхъ и расположенныхъ симметрично относительно оси X-овъ. Легко замѣтить, что при значеніяхъ  $x$ , обращающихъ  $\sec x$  въ  $\pm 1$ , графики секансоиды и косинусоиды совпадаютъ, т. е. имѣютъ общія точки (напр.  $M; N_1; M_3$ ).

**Примѣчаніе.** Измѣненія косинуса, котангенса и косеканса я не рассматриваю отдѣльно въ виду того, что ихъ легко привести къ прежнимъ, взявъ только вмѣсто  $x$  уголъ  $x + \frac{\pi}{2}$ . Тогда и графики этихъ дополнительныхъ функций представятся тѣми же кривыми; начальныя вѣтви ихъ будутъ различаться только

разстояніемъ отъ 0. Построеніе графикъ дополнитель-  
ныхъ функцій предоставляю самимъ учащимся.

40. Общая картина измѣненія гониометрическихъ  
функцій лучше всего представлена въ слѣдующей  
таблицѣ, соединяющей въ себѣ данныя предыдущихъ  
исслѣдованій:

| Углы                 | Sinus     | Cosinus   | Tangens                 | Cotangens               | Secans                    | Cosecans                  |
|----------------------|-----------|-----------|-------------------------|-------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 0                    | 0         | 1         | 0                       | $\pm \infty$            | 1                         | $\pm \infty$              |
| $\frac{\pi}{2} - x$  | $\cos x$  | $\sin x$  | $\operatorname{ctg} x$  | $\operatorname{tg} x$   | $\operatorname{cosec} x$  | $\sec x$                  |
| $\frac{\pi}{2}$      | 1         | 0         | $\pm \infty$            | 0                       | $\pm \infty$              | 0                         |
| $\frac{\pi}{2} + x$  | $\cos x$  | $-\sin x$ | $-\operatorname{ctg} x$ | $-\operatorname{tg} x$  | $-\operatorname{cosec} x$ | $\sec x$                  |
| $\pi - x$            | $\sin x$  | $-\cos x$ | $-\operatorname{tg} x$  | $-\operatorname{ctg} x$ | $-\sec x$                 | $\operatorname{cosec} x$  |
| $\pi$                | 0         | -1        | 0                       | $\mp \infty$            | -1                        | $\pm \infty$              |
| $\pi + x$            | $-\sin x$ | $-\cos x$ | $\operatorname{tg} x$   | $\operatorname{ctg} x$  | $-\sec x$                 | $-\operatorname{cosec} x$ |
| $\frac{3\pi}{2} - x$ | $-\cos x$ | $-\sin x$ | $\operatorname{ctg} x$  | $\operatorname{tg} x$   | $-\operatorname{cosec} x$ | $-\sec x$                 |
| $\frac{3\pi}{2}$     | -1        | 0         | $\pm \infty$            | 0                       | $\mp \infty$              | -1                        |
| $\frac{3\pi}{2} + x$ | $-\cos x$ | $\sin x$  | $-\operatorname{ctg} x$ | $-\operatorname{tg} x$  | $\operatorname{cosec} x$  | $-\sec x$                 |
| $2\pi - x$           | $-\sin x$ | $\cos x$  | $-\operatorname{tg} x$  | $-\operatorname{ctg} x$ | $\sec x$                  | $-\operatorname{cosec} x$ |
| $2\pi$               | 0         | 1         | 0                       | $\mp \infty$            | 1                         | $\mp \infty$              |
| $2\pi + x$           | $\sin x$  | $\cos x$  | $\operatorname{tg} x$   | $\operatorname{ctg} x$  | $\sec x$                  | $\operatorname{cosec} x$  |
| $-x$                 | $-\sin x$ | $\cos x$  | $-\operatorname{tg} x$  | $-\operatorname{ctg} x$ | $\sec x$                  | $-\operatorname{cosec} x$ |

41. Разсматривая послѣднюю строчку нашей таблицы мы видимъ, что двѣ функціи—косинусъ и секансъ—не измѣняютъ знака съ измѣненіемъ знака у независимой переменнѣй. Такія функціи принято называть четными. Итакъ, косинусъ и секансъ—функціи четныя; синусъ, тангенсъ, котангенсъ и косекансъ—функціи нечетныя.

42. **Періодичность круговыхъ функцій.** Внимательно разсмотрѣвъ графики круговыхъ функцій, мы приходимъ къ простымъ и важнымъ заключеніямъ. Такъ, всѣ эти графики состоятъ изъ безчисленнаго множества вѣтвей, но вѣтви каждой изъ нихъ повторяются въ извѣстномъ порядкѣ, подобно цифрамъ десятичной періодической дроби. Обращаясь затѣмъ къ независимой переменнѣй  $x$ , мы видимъ, что эти повторенія имѣютъ мѣсто всякій разъ, когда  $x$  увеличивается на  $2\pi$ , т. е. на цѣлую окружность. Вообще говоря, если отъ прибавленія къ независимому переменному какого-нибудь опредѣленнаго количества функція этого переменнаго не измѣняетъ своего значенія, то такая функція называется періодическою, а прибавляемое количество—періодомъ функціи. Таковы всѣ круговыя функціи; 4 изъ нихъ—синусъ, косинусъ, секансъ и косекансъ—имѣютъ періодъ  $2\pi$ , а 2—тангенсъ и котангенсъ—имѣютъ періодъ  $\pi$ .

43. **Непрерывность круговыхъ функцій.** Мы уже знаемъ, что независимая переменная  $x$  измѣняется непрерывно, но относительно функцій ея ничего пока сказать не можемъ. Разсмотримъ опять графики этихъ функцій. Обращаясь сначала къ синусоидѣ, мы видимъ, что она представляетъ собою безконечную непрерывную кривую; это слѣдуетъ изъ того, что синусъ

есть функция непрерывная. Действительно, все значения синуса заключаются между  $-1$  и  $+1$ , и при всяких  $x$  синусъ имѣетъ только одно конечное и определенное значеніе. Тотъ же выводъ мы вправѣ сдѣлать и относительно косинуса. Итакъ, синусъ и косинусъ суть функции непрерывныя. Далѣе, графика тангенса представляетъ безконечный рядъ отдѣльныхъ вѣтвей, оба конца коихъ удаляются въ безконечность, одинъ по направленію положительной оси  $Y$ -овъ, другой — отрицательной; изъ этого мы заключаемъ, что тангенсъ есть функция прерывная. Для опредѣленія точекъ разрыва вспомнимъ, что при  $x$ , равномъ  $\pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\pm \frac{3\pi}{2}$ ,  $\pm \frac{5\pi}{2}$ , ..., т. е. нечетному (положительному или отрицательному) числу четвертей, тангенсъ получаетъ два значенія:  $+\infty$  и  $-\infty$ , слѣдовательно, при упомянутыхъ значеніяхъ  $x$  функция тангенсъ претерпѣваетъ разрывъ непрерывности. Тоже самое относится и къ котангенсу, но только послѣдній претерпѣваетъ разрывъ при  $x$ , равномъ  $0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$ . Наконецъ, графика секанса представляетъ безконечный рядъ дугъ, оба конца коихъ удаляются въ безконечность то со стороны положительной оси  $Y$ -овъ, то со стороны отрицательной; такимъ образомъ секансъ, а, слѣдовательно, и косекансъ, суть функции прерывныя. Первая изъ нихъ претерпѣваетъ разрывъ непрерывности при  $x$ , равномъ  $\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$ , вторая — при  $x$ , равномъ  $0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$ , такъ какъ тогда эти функции получаютъ два значенія:  $+\infty$  и  $-\infty$ . Итакъ, тангенсъ и секансъ суть функции прерывныя, когда независимая переменная  $x$

равна нечетному числу четвертей; котангенсъ и coseкансъ суть функціи прерывныя, когда независимая переменная  $x$  равна четному числу четвертей; при всѣхъ остальныхъ соотвѣтственныхъ значеніяхъ независимой переменной  $x$  эти функціи непрерывны.

---

### **Глава III. Главныя соотношенія между круговыми функціями.**

#### **А. Система основныхъ соотношеній.**

**41. ТЕОРЕМА.** Между шестью круговыми функціями одного и того же угла существуетъ только пять независимыхъ соотношеній.

Покажемъ, что такихъ соотношеній не можетъ быть ни больше, ни меньше.

Если бы ихъ было 6, то тогда 6 уравненій съ 6 неизвѣстными, при условіи теоремы, что всѣ уравненія независимы, т. е. каждое изъ нихъ не есть слѣдствіе остальныхъ, представили бы систему, вполне опредѣляющую всѣ 6 функцій одного и того же угла, независимо отъ его значенія. Иными словами, для всевозможныхъ угловъ  $x$  шесть круговыхъ функцій сохраняли бы всегда одно и то-же опредѣленное значеніе, т. е. изъ функцій онѣ превратились бы въ постоянныя числа; очевидно, это невозможно.

Если бы ихъ было 4, то, зная одну изъ функцій, мы бы имѣли систему 4-хъ уравненій съ 5-ю неизвѣстными, систему неопредѣленную. Между тѣмъ мы знаемъ, что по заданному значенію одной функціи мы можемъ опредѣлить (графически и аналитически)

какъ уголъ  $x$ , такъ и остальные функции. Это показываетъ, что число уравненій должно быть равно числу неизвѣстныхъ, т. е. въ данномъ случаѣ должно равняться пяти.

Итакъ, оба предположенія оказались невѣрными; остается признать, что основныхъ соотношеній должно быть только 5, что и т. д.

**45. Основные соотношенія.** Система основныхъ соотношеній состоитъ изъ слѣдующихъ пяти уравненій:

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \\ \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \\ \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \\ \sec x = \frac{1}{\cos x}, \\ \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}. \end{array} \right.$$

Первыя три формулы были выведены въ Тригонометріи; 4-ая и 5-ая вытекаютъ изъ опредѣленій секанса и косеканса.

**46. Доказательство общности системы (1).** Данныя формулы справедливы для всѣхъ значеній независимой переменнѣй  $x$ .

*По абсолютной величинѣ:* на основаніи формулъ приведенія мы можемъ функцию любого угла  $x$  выразить одноименной функцией угла I-го квадранта. Поэтому для любого угла  $X$  имѣютъ мѣсто равенства

$$\sin X = \text{числ. знач. } \sin x,$$

$$\cos X = \text{числ. знач. } \cos x,$$

$$\operatorname{tg} X = \text{числ. знач. } \operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{ctg} X = \text{числ. знач. } \operatorname{ctg} x,$$

$$\sec X = \text{числ. знач. } \sec x,$$

$$\operatorname{cosec} X = \text{числ. знач. } \operatorname{cosec} x.$$

Здѣсь уголъ  $x$  обозначаетъ уголъ I-го квадранта, опредѣляемый по формуламъ приведенія.

*По знаку:* въ первой формулѣ оба члена лѣвой части всегда положительны, какъ квадраты вещественныхъ чиселъ. Далѣе, тангенсы и котангенсы, согласно правилу Достора, положительны въ I-мъ и III-мъ квадрантахъ; въ тѣхъ же квадрантахъ синусъ и косинусъ одного знака, поэтому обѣ части равенствъ 2-го и 3-го одновременно положительны. Если же тангенсъ и котангенсъ отрицательны, то это имѣетъ мѣсто либо во II-мъ, либо въ IV-мъ квадрантѣ, а тогда синусъ и косинусъ имѣютъ одновременно различные знаки и ихъ частныя отрицательны. Итакъ въ обѣихъ частяхъ равенства 2-го и 3-го знаки всегда одинаковы.

Наконецъ, согласно тому же правилу Достора, одинаковые знаки одновременно сохраняютъ секансъ и косинусъ, косекансъ и синусъ, что служитъ доказательствомъ общности 4 и 5-ой формулъ.

**47. Слѣдствія.** Изъ 5-ти основныхъ соотношеній легко вывести другія, являющіяся простыми слѣдствіями первыхъ; онѣ полезны при различныхъ преобразованіяхъ.

Таковы, напримѣръ:

$$2) \quad \begin{cases} \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1, \\ \sin x \cdot \operatorname{cosec} x = 1, \\ \cos x \cdot \sec x = 1. \end{cases}$$

Раздѣливъ обѣ части равенства  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  сначала на  $\sin^2 x$ , а затѣмъ на  $\cos^2 x$ , получимъ еще двѣ формулы

$$3) \quad \begin{cases} 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x, \\ 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x. \end{cases}$$

Всѣ формулы группъ 2-ой и 3-ей легко получить и геометрически; но аналитическій методъ предпочтительнѣе по двумъ причинамъ: во-1-хъ, выводя эти формулы изъ общихъ, мы увѣрены въ ихъ *общности*; во-2-хъ, самъ выводъ показываетъ, что онѣ суть *слѣдствія* основныхъ формулъ, а не независимыя, новыя соотношенія.

## В. Теорема сложенія и ея слѣдствія.

**48. Сущность и значеніе теоремы.** Если мы знаемъ синусы и косинусы двухъ какихъ-нибудь угловъ, то нельзя-ли найти формулу для синуса и косинуса новаго угла, полученнаго отъ сложенія данныхъ? Такую задачу поставилъ впервые Кл. Птоломей и рѣшилъ ее блестяще. Выведенная имъ формула относилась лишь къ синусу суммы двухъ острыхъ угловъ; съ тѣхъ поръ ее распространили на всевозможные

углы и на всѣ функціи. Въ настоящее время она известна подъ названіемъ «теорема сложенія».

Лазарь Карно (1753—1823), знаменитый «организаторъ побѣды» и не менѣе известный математикъ, въ своей «Géométrie de position» (1803) показалъ, какъ изъ формулы, данной Птолемеемъ, можно получить всѣ формулы Гоніометріи и Тригонометріи; его пріемъ отчасти примѣненъ въ настоящей главѣ.

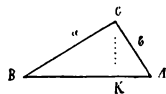
Въ виду важности «теоремы сложенія» существуетъ много выводовъ ея. Наиболѣе простымъ я считаю слѣдующій, основанный на одной вспомогательной теоремѣ, выводъ которой я сейчасъ укажу.

**49. ТЕОРЕМА ПРОЭКЦІЙ.** Алгебраическая сумма проэкцій двухъ сторонъ треугольника на третью равна третьей сторонѣ.

Докажемъ теорему для остроугольнаго и тупоугольнаго треугольниковъ.

I. Пусть въ  $\triangle ABC$  (чер. 16) стороны « $a$ » и « $b$ » проэктируются на « $c$ »; тогда

$$\begin{array}{l} BK = \text{пр.} \\ KA = \text{пр. } b \\ \hline c = \text{пр. } a + \text{пр. } b \end{array}$$



Черт. 16.

Такъ какъ изъ прямоугольныхъ треугольниковъ  $BCK$  и  $CAK$  находимъ

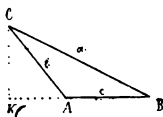
$$BK = a \cos B, \quad KA = b \cos A,$$

то окончательно

$$4) \quad c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A.$$

II. Пусть въ треугольникѣ  $ABC$  (чер. 17) уголъ  $A$  тупой. Тогда

$$\begin{array}{l} KB = \text{пр. } a \\ KA = \text{пр. } b \\ \hline c = \text{пр. } a - \text{пр. } b \end{array}$$



Черт. 17.

Съ другой стороны

$$KB = a \cdot \cos B, KA = -b \cdot \cos A,$$

такъ какъ  $\cos A$  — величина отрицательная, если уголъ  $A$  тупой, Поэтому

$$\text{пр. } a - \text{пр. } b = a \cos B - (-b \cos A),$$

и

$$c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A,$$

т. е. мы получили тотъ же результатъ, что и раньше.

**50. Слѣдствіе.** Составимъ формулы для сторонъ «а» и «b»

$$a = b \cos C + c \cos B,$$

$$b = a \cos C + c \cos A.$$

При  $C = \frac{\pi}{2}$  имѣемъ  $\cos C = 0$  и

$$a = c \cdot \cos B, b = c \cdot \cos A.$$

Эти формулы (11) частію I-ой, полученныя нами раньше независимымъ путемъ для прямоугольнаго треугольника.

**51. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНІЯ. I.** Синусъ суммы двухъ угловъ равенъ произведенію синуса перваго угла на косинусъ втораго, плюсъ произведеніе косинуса перваго угла на синусъ втораго.

**II.** Косинусъ суммы двухъ угловъ равенъ произведенію косинусовъ обоихъ угловъ, минусъ произведеніе ихъ синусовъ.

Подставляя вмѣсто  $\sin(\alpha + y)$ ,  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  ихъ значенія въ функціяхъ  $x$ , находимъ вторую изъ найденныхъ формулъ

$$\cos(\alpha + y) = \cos \alpha \cos y - \sin \alpha \sin y.$$

**Обобщеніе.** Покажемъ теперь, что обѣ формулы можно распространить на любыя значенія  $x$  и  $y$ .

**А. Формулы вѣрны, если  $x + y < \pi$ .** Въ этомъ случаѣ  $x$  и  $y$  можно разсматривать, какъ углы треугольника. Такъ какъ теоремы проэкцій и синусовъ доказаны для всякаго треугольника, то и выведенныя изъ нихъ формулы (5) и (6) вѣрны при  $x + y < \pi$ .

**В. Формулы вѣрны, если одинъ изъ угловъ увеличить на  $\frac{\pi}{2}$ .**

Предположимъ, что наши формулы вѣрны для нѣкоторыхъ положительныхъ угловъ  $x$  и  $y$ . Прибавляя къ одному изъ нихъ, на примѣръ къ  $x$ , величину  $\frac{\pi}{2}$ , получимъ новый уголъ  $\alpha = \frac{\pi}{2} + x$ , откуда  $x = \alpha - \frac{\pi}{2}$ . Далѣе

$$\sin \left[ \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) + y \right] = \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) \cos y + \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) \sin y,$$

$$\cos \left[ \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) + y \right] = \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) \cos y - \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{2} \right) \sin y.$$

Такъ какъ

$$\alpha - \frac{\pi}{2} + y = - \left[ \frac{\pi}{2} - (\alpha + y) \right], \quad \alpha - \frac{\pi}{2} = - \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right),$$

то по формуламъ приведенія для отрицательныхъ угловъ имѣемъ

$$-\sin \left[ \frac{\pi}{2} - (\alpha + y) \right] = -\sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos y + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin y,$$

$$\cos \left[ \frac{\pi}{2} - (\alpha + y) \right] = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos y + \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin y,$$

и наконецъ

$$\cos (\alpha + y) = \cos \alpha \cos y - \sin \alpha \sin y,$$

$$\sin (\alpha + y) = \sin \alpha \cos y + \cos \alpha \sin y.$$

Мы получили тѣ же формулы, что и раньше. Но такъ какъ уголъ  $x$  измѣнился въ  $x + \frac{\pi}{2}$ , то и функции измѣнились на дополнительные; поэтому  $\sin(x+y) = \cos(\alpha+y)$  и  $\cos(x+y) = \sin(\alpha+y)$ .

**С. Формулы вѣрны для всѣхъ положительныхъ угловъ  $x$  и  $y$ .**

Пусть  $x$  и  $y$  произвольные положительные углы; тогда мы можемъ положить  $x = m \frac{\pi}{2} + x_1$ ,  $y = n \frac{\pi}{2} + y_1$ , гдѣ  $m$  и  $n$  цѣлыя положительные числа, а  $x_1$  и  $y_1$  порознь меньше  $\frac{\pi}{2}$ . Имѣемъ

$$\sin (x_1 + y_1) = \sin x_1 \cos y_1 + \cos x_1 \sin y_1;$$

$$\cos (x_1 + y_1) = \cos x_1 \cos y_1 - \sin x_1 \sin y_1.$$

Если мы къ углу  $x_1$  прибавимъ  $m$  разъ по  $\frac{\pi}{2}$ , то, согласно предыдущему, справедливость обѣихъ формулъ не нарушится; точно также онѣ не измѣнятся, если мы къ углу  $y_1$  прибавимъ  $n$  разъ по  $\frac{\pi}{2}$ . Итакъ, при всякихъ положительныхъ  $x$  и  $y$

$$\sin (x+y)=\sin x \cos y+\cos x \sin y,$$

$$\cos (x+y)=\cos x \cos y-\sin x \sin y.$$

**D. Формулы вѣрны для всѣхъ отрицательныхъ угловъ  $x$  и  $y$ .**

Положимъ, что оба угла  $x$  и  $y$  отрицательны. Прибавимъ къ каждому изъ нихъ по  $2k\pi=4k\frac{\pi}{2}$ , причемъ  $k$  выберемъ настолько большимъ, чтобы  $x+2k\pi$  и  $y+2k\pi$  стали величинами положительными. Далѣе  $(x+2k\pi)+(y+2k\pi)=4k\pi+(x+y)$  и, въ силу періодичности,

$$\sin [4k\pi+(x+y)]=\sin (x+y),$$

$$\cos [4k\pi+(x+y)]=\cos (x+y).$$

Такимъ образомъ мы можемъ замѣнить сумму двухъ отрицательныхъ угловъ суммою двухъ положительныхъ, не нарушая значеній ихъ синусовъ и косинусовъ, и, слѣдовательно, мы получимъ для нихъ тѣ же формулы (5) и (6).

Итакъ общность нашихъ формулъ доказана вполне.

**52. Слѣдствія.** Замѣняя въ (5) и (6)  $y$  на  $-y$ , получимъ

$$7) \quad \sin (x-y)=\sin x \cos y-\cos x \sin y,$$

$$8) \quad \cos (x-y)=\cos x \cos y+\sin x \sin y.$$

Далѣе

$$\operatorname{tg} (x \pm y)=\frac{\sin x \cos y \pm \cos x \sin y}{\cos x \cos y \mp \sin x \sin y},$$

откуда, по раздѣленіи числителя и знаменателя правой части на  $\cos x \cos y$ , выводимъ

$$9) \quad \operatorname{tg} (x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Точно также

$$10) \quad \operatorname{ctg} (x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.$$

Формулы 7—10 вѣрны для всякихъ угловъ  $x$  и  $y$ , такъ какъ онѣ получены изъ общихъ формулъ (5) и (6).

**53. Функціи суммы многихъ угловъ.** Указанные общіе приемы даютъ возможность вычислить круговыя функціи различныхъ болѣе сложныхъ угловъ. Напр. для вычисленія функцій угла, рассматриваемаго какъ сумма трехъ угловъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , достаточно поступить такъ: написать

$$x + y + z = (x + y) + z$$

и затѣмъ примѣнить дважды теорему сложенія, сначала для суммы  $(x + y) + z$ , а затѣмъ для суммы  $x + y$ .

Подобный же приемъ можно примѣнить для нахождения функцій суммы 4-хъ, 5-ти и болѣе угловъ.

Очевидно, что въ данномъ случаѣ мы имѣемъ въ виду алгебраическую сумму; если нѣкоторые изъ угловъ отрицательны, то это нисколько не вліяетъ на приемъ вычисленія.

### **С. Формулы для функцій двойныхъ и половинныхъ угловъ.**

**54. Двойные углы.** Полагая въ формулахъ (5) и (6)  $x = y$ , находимъ

$$11) \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$12) \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Точно также изъ (9) и (10) получимъ двѣ другія формулы

$$13) \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x},$$

$$14) \quad \operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}.$$

Всѣ 4 формулы вѣрны для всякихъ угловъ, такъ какъ онѣ получены изъ общихъ формулъ предыдущихъ §§.

**55. Функціи тройныхъ и многократныхъ угловъ** можно вычислить, полагая

$$3x = 2x + x,$$

$$4x = 3x + x \text{ или } 2.2.x$$

$$5x = 3x + 2x \text{ или } 4.x + x,$$

. . . . .

$$nx = (n - 1)x + x, \text{ и т. п.}$$

Въ главѣ IV'-ой будутъ выведены *формулы Симпсона*, дающія возможность найти сразу  $\sin nx$  и  $\cos nx$ , если извѣстны синусы и косинусы угловъ  $(n - 1)x$  и  $(n - 2)x$ .

Всѣ эти формулы даютъ для функцій угловъ, большихъ  $x$ , выраженія раціональныя и однозначныя.

**56. Половинные углы.** Рѣшимъ теперь задачу, обратную предыдущей (§ 54): зная  $\sin x$  и  $\cos x$ , найти  $\sin \frac{x}{2}$  и  $\cos \frac{x}{2}$ . Наиболѣ простое рѣшеніе этой задачи слѣдующее. Возьмемъ формулу (12) и перепишемъ ее такъ

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Замѣнимъ сначала  $\cos^2 \frac{x}{2}$  черезъ  $1 - \sin^2 \frac{x}{2}$ . Тогда

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$$

$$15) \quad \sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}.$$

Подобнымъ же образомъ, замѣняя  $\sin^2 \frac{x}{2}$  черезъ  $1 - \cos^2 \frac{x}{2}$ , получимъ

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1,$$

$$2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x,$$

$$16) \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$

Формула (15) встрѣчается впервые у Клавдія Птоломея.

**57. Причина двойственности формулъ 15-ой и 16-ой.** Послѣднія двѣ формулы необходимо изслѣдовать, такъ какъ мы получили ихъ алгебраическимъ путемъ и результаты могутъ не удовлетворять требованіямъ гониометріи.

*По абсолютной величинѣ.* Во I-хъ,  $\cos x$  не превышаетъ 1, поэтому выраженія  $1 + \cos x$  и  $1 - \cos x$

всегда положительны, каковы бы ни были значенія угла  $x$ . Отсюда мы заключаемъ, что правыя части равенствъ 15-го и 16-го всегда вещественны. Во II-хъ, оба выраженія  $1 + \cos x$  и  $1 - \cos x$  никогда не превышаютъ 2, слѣдовательно, подрадикальныя выраженія  $\frac{1 + \cos x}{2}$  и  $\frac{1 - \cos x}{2}$  суть правильныя дроби или же равны 1. Поэтому и выраженія  $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$  и  $\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$  заключаются между 0 и 1.

Итакъ, абсолютныя значенія радикаловъ (15) и (16) могутъ быть приняты за соотвѣтственные значенія синусовъ и косинусовъ всякихъ угловъ.

*Двойные знаки*, стоящіе передъ разсматриваемыми радикалами, показываютъ намъ, что совокупность значеній  $\sin \frac{x}{2}$  и  $\cos \frac{x}{2}$  можетъ быть представлена въ одномъ изъ слѣдующихъ четырехъ видовъ

$$\text{I)} \quad \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = + \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \\ \cos \frac{x}{2} = + \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}. \end{cases}$$

$$\text{II)} \quad \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = + \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \\ \cos \frac{x}{2} = - \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}. \end{cases}$$

$$\text{III)} \quad \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = - \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \\ \cos \frac{x}{2} = - \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}. \end{cases}$$

$$\text{IV) } \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \\ \cos \frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}. \end{cases}$$

Покажемъ теперь, что это алгебраическое заключеніе вполне согласуется съ гониометрическимъ выводомъ.

Въ силу періодичности и четности функціи косинусъ имѣемъ

$$x = 2k\pi \pm \alpha,$$

гдѣ  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  и  $k$  — нѣкоторое цѣлое (положительное) число. Отсюда слѣдуетъ, что  $\frac{x}{2}$  можетъ имѣть два ряда значеній

$$\frac{x}{2} = k\pi + \frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{x}{2} = k\pi - \frac{\alpha}{2}.$$

Періодъ синуса и косинуса есть  $2\pi$ ; здѣсь же къ  $\pm \frac{\alpha}{2}$  мы прибавляемъ лишь цѣлое число разъ по  $\pi$ ; поэтому мы видимъ, что знаки функцій  $\sin \frac{x}{2}$  и  $\cos \frac{x}{2}$  зависятъ отъ четности или нечетности числа  $k$ .

Итакъ легко заключить уже а priori, что задача имѣетъ 4 рѣшенія.

Ихъ можно расположить въ слѣдующей табличкѣ.

1-ый случай:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\alpha}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Если } k \text{ четное,} \\ \text{то } k = 2n. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{x}{2} = \sin \left( 2n\pi + \frac{\alpha}{2} \right) = \\ \quad = + \sin \frac{\alpha}{2}, \\ \cos \frac{x}{2} = \cos \left( 2n\pi + \frac{\alpha}{2} \right) = \\ \quad = + \cos \frac{\alpha}{2}. \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} = k\pi + \frac{\alpha}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Если } k \text{ нечетн.,} \\ \text{то } k = 2n + 1. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{x}{2} = \sin \left[ (2n + 1)\pi + \frac{\alpha}{2} \right] = \\ \quad = \sin \left( \pi + \frac{\alpha}{2} \right) = - \sin \frac{\alpha}{2}, \\ \cos \frac{x}{2} = \cos \left[ (2n + 1)\pi + \frac{\alpha}{2} \right] = \\ \quad = \cos \left( \pi + \frac{\alpha}{2} \right) = - \cos \frac{\alpha}{2}. \end{array} \right.$$

2-ой случай:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} = k\pi - \frac{\alpha}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Если } k \text{ четное,} \\ \text{то } k = 2n \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{x}{2} = \sin \left( 2n\pi - \frac{\alpha}{2} \right) = \\ \quad = \sin \left( -\frac{\alpha}{2} \right) = - \sin \frac{\alpha}{2}. \\ \cos \frac{x}{2} = \cos \left( 2n\pi - \frac{\alpha}{2} \right) = \\ \quad = \cos \left( -\frac{\alpha}{2} \right) = + \cos \frac{\alpha}{2}. \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{2} = k\pi - \frac{\alpha}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Если } k \text{ нечетн.,} \\ \text{то } k = 2n + 1. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{x}{2} = \sin \left[ (2n + 1)\pi - \frac{\alpha}{2} \right] = \\ \quad = \sin \left( \pi - \frac{\alpha}{2} \right) = + \sin \frac{\alpha}{2}. \\ \cos \frac{x}{2} = \cos \left[ (2n + 1)\pi - \frac{\alpha}{2} \right] = \\ \quad = \cos \left( \pi - \frac{\alpha}{2} \right) = - \cos \frac{\alpha}{2}. \end{array} \right.$$

Сравнивая новыя 4 совокупности съ прежними мы видимъ, что по знакамъ онѣ вполнѣ тождественны. Итакъ каждая изъ совокупностей I—IV имѣетъ смыслъ, а именно: опредѣляетъ собою квадрантъ, въ которомъ находится уголъ  $\frac{x}{2}$ .

**Замѣчаніе.** Въ частныхъ случаяхъ, когда указано, въ какомъ квадрантѣ находится уголъ  $x$ , для вычисления  $\sin \frac{x}{2}$  и  $\cos \frac{x}{2}$  нужно выбрать одну изъ полученныхъ совокупностей, опредѣляемую квадрантомъ угла  $\frac{x}{2}$ .

**58. Формулы для  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  и  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ .** Изъ (15) и (16) сразу получаемъ:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}, \quad \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}.$$

Оба выраженія можно упростить, помножая числителей и знаменателей подрадикальныхъ дробей либо на  $1 + \cos x$ , либо на  $1 - \cos x$ . Тогда мы получимъ двѣ группы формулъ, различающихся лишь по виду:

$$17) \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}, \quad \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{\sin x},$$

$$18) \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}.$$

**59. Изслѣдованіе.** Сначала покажемъ, что два значенія  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , или  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ , тождественны. Для этого напомнимъ равенство

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x},$$

откуда

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \quad \sin^2 x = \sin^2 x.$$

Точно также

$$\frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 - \cos x},$$

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x, \quad \sin^2 x = \sin^2 x.$$

Далѣе, два знака при правой части формулъ 17-ой и 18-ой не нужны, такъ какъ: 1) двучлены  $1 + \cos x$  и  $1 - \cos x$  положительны при всѣхъ значеніяхъ  $x$ ; 2) знаки всей дроби совпадаетъ, слѣдовательно, со знакомъ  $\sin x$ , а мы имѣемъ соотношенія

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}.$$

У произведенія и у частнаго однихъ и тѣхъ же величинъ знака всегда одинаковы, поэтому знаки  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  и  $\sin x$  тоже всегда одинаковы. Совершенно то же относится и къ котангенсу.

Итакъ, каковъ бы ни былъ уголъ  $x$ , выраженія  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  и  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$  всегда однозначны и раціональны, если только онѣ составлены изъ  $\sin x$  и  $\cos x$ .

60. Функції угла  $\frac{x}{n}$ . Не существуетъ общихъ формулъ, по которымъ можно было бы выразить функціи угла  $\frac{x}{n}$ , при любыхъ значеніяхъ цѣлаго числа  $n$ , въ зависимости отъ функцій угла  $x$ . Общій приѣмъ для рѣшенія вопроса состоитъ въ слѣдующемъ. Мы беремъ два уравненія: одно, выражающее  $\sin x$  и  $\cos x$  черезъ  $\sin \frac{x}{n}$  и  $\cos \frac{x}{n}$  (см. § 70, глава IV), и другое:  $\sin^2 \frac{x}{n} + \cos^2 \frac{x}{n} = 1$ . Этотъ приѣмъ приводитъ къ рѣшенію уравненія съ одной неизвѣстной степени  $n$ -ой, что выходитъ за предѣлы настоящаго курса.

Въ частныхъ случаяхъ, когда  $n$  будетъ степенью числа 2, вопросъ сводится къ рѣшенію ряда квадратныхъ уравненій, т. е. къ послѣдовательному примѣненію формулъ для функцій половинныхъ угловъ.

#### D. Выраженія функцій черезъ одну изъ нихъ.

61. При рѣшеніи различныхъ вопросовъ математическаго анализа полезно уметь выразить всѣ функціи какого либо угла въ зависимости отъ одной изъ нихъ или же отъ функцій угла двойного, половиннаго, и т. п. Такія преобразованія необходимы, напр., при рѣшеніи громаднаго большинства гониометрическихъ уравненій. Нѣкоторыми изъ такихъ преобразованій мы и займемся.

62. Нижеслѣдующая таблица даетъ выраженія всѣхъ функцій угла  $x$  черезъ одну изъ нихъ; эти выраженія расположены по столбцамъ.

|                                          |                                          |                                                                    |                                                                      |                                          |                                                                          |
|------------------------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| $\sin x$                                 | $\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$                | $\pm \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$ | $\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}$                    | $\pm \frac{\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x}$ | $\frac{1}{\operatorname{cosec} x}$                                       |
| $\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$                | $\cos x$                                 | $\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$                   | $\pm \frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}$ | $\frac{1}{\sec x}$                       | $\pm \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}}{\operatorname{cosec} x}$ |
| $\frac{\sin x}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 x}}$ | $\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x}$ | $\operatorname{tg} x$                                              | $\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$                                     | $\pm \frac{\sqrt{\sec^2 x - 1}}{\sec x}$ | $\pm \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}}$                      |
| $\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$ | $\pm \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$ | $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$                                    | $\operatorname{ctg} x$                                               | $\pm \frac{1}{\sqrt{\sec^2 x - 1}}$      | $\pm \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}}{\operatorname{cosec} x}$ |
| $\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$      | $\frac{1}{\cos x}$                       | $\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}$                   | $\pm \frac{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}{\operatorname{ctg} x}$ | $\sec x$                                 | $\pm \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}}{\operatorname{cosec} x}$ |
| $\frac{1}{\sin x}$                       | $\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$      | $\pm \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x}$ | $\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}$                    | $\pm \frac{\sec x}{\sqrt{\sec^2 x - 1}}$ | $\operatorname{cosec} x$                                                 |

Каждая строчка даетъ различные виды одной и той же функціи.

Полученныя шесть системъ содержатъ почти исключительно радикальныя выраженія и двойные знаки, поэтому примѣненія этихъ системъ слѣдуетъ по возможности избѣгать. Зато весьма полезна на практикѣ слѣдующая система.

**63. ТЕОРЕМА.** Всѣ круговыя функціи угла  $x$  выражаются раціонально и однозначно черезъ тангенсъ угла  $\frac{x}{2}$ .

Доказательство теоремы состоитъ изъ 2 частей.

I. Формула (13) показываетъ, что выраженія для  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$  черезъ  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  раціональны, а именно

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

Далѣе, выраженія для  $\sec x$  и  $\operatorname{cosec} x$  будутъ раціональны, если таковыми окажутся выраженія для  $\sin x$  и  $\cos x$ . Поэтому займемся послѣдними.

Имѣемъ:

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}, \\ \cos x &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Раздѣлимъ правыя части обоихъ равенствъ на  $(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2})$ , отчего они не измѣнятся; тогда:

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}, \\ \cos x &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Наконецъ, раздѣливъ каждую изъ дробей почленно на  $\cos^2 \frac{x}{2}$ , получимъ искомыя выраженія:

$$19) \quad \left. \begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \\ \cos x &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned} \right\} \text{Lambert, 1765.}$$

Итакъ, всѣ 6 функций угла  $x$  выражаются рационально черезъ  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, & \operatorname{ctg} x &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}, \\ \cos x &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, & \sec x &= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \\ \operatorname{tg} x &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, & \operatorname{cosec} x &= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

II. Для доказательства второй половины теоремы положимъ, что  $\alpha$  — наименьшее значеніе угла  $\frac{x}{2}$ . Такъ какъ періодъ тангенса есть  $\pi$ , то всѣ углы  $\frac{x}{2}$ , имѣющіе одинаковый тангенсъ, заключаются въ формулѣ

$$\frac{x}{2} = k\pi + \alpha;$$

отсюда слѣдуетъ, что

$$x = 2k\pi + 2\alpha,$$

т. е. всѣ значенія угла  $x$  различаются на цѣлое число окружностей; иными словами, всѣ углы  $x$  графически совпадаютъ, и, слѣдовательно, каждая изъ функцій угла  $x$  имѣетъ лишь одно значеніе.

Теорема доказана вполне.

## УПРАЖНЕНІЯ.

1. Показать справедливость формулъ.

$$A. \sin (a + b + c) = \sin a \cos b \cos c + \sin b \cos a \cos c + \\ + \sin c \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin c.$$

$$\cos (a + b + c) = \cos a \cos b \cos c - \sin a \sin b \cos c - \\ - \sin b \sin c \cos a - \sin c \sin a \cos b.$$

$$\operatorname{tg} (a + b + c) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} c \operatorname{tg} a}.$$

$$B. \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x; \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x;$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}; \quad \operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3 \operatorname{ctg} x}{3 \operatorname{ctg}^2 x - 1};$$

$$\sin 4x = (4 \sin x - 8 \sin^3 x) \cos x; \quad \cos 4x = 8 \cos^4 x - \\ - 8 \cos^2 x + 1;$$

$$\operatorname{tg} 4x = \frac{4 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{tg}^3 x}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}; \quad \cos 5x = 16 \cos^5 x - \\ - 20 \cos^3 x + 5 \cos x.$$

2. Пользуясь теоремой сложения, найти функціи угловъ:

$75^\circ, 48^\circ; 15^\circ, 9^\circ, 36^\circ, 22^\circ 30'; 12^\circ, 27^\circ, 42^\circ, 63^\circ, 78^\circ;$   
 $3^\circ, 21^\circ, 24^\circ, 6^\circ, 39^\circ, 7^\circ 30'$  и т. п.

3. Показать, что  $\cos 0 = 1$ ,  $\sin 0 = 0$ ,  $\operatorname{tg} 0 = 0$ ,  $\sin \pi = 0$ ,  $\operatorname{tg} \pi = 0$ ,  $\operatorname{ctg} \pi = \infty$  и т. п., пользуясь теоремой сложения и ея слѣдствіями.

4. Найти  $x = a + b$ , если  $\sin a = 0,5$ ;  $\sin b =$   
 $= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$

5. Показать, что

$$\sin \frac{\pi}{2^n} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \dots \pm \sqrt{2}}}}}{2},$$

$$\cos \frac{\pi}{2^n} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}}{2};$$

число радикаловъ въ каждой дроби равно  $n - 1$ , и  $n$  — число цѣлое и положительное.

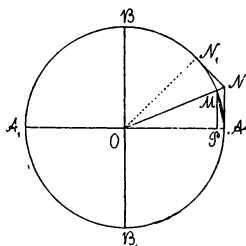
6. Упростить выраженія:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} (\alpha + 45^\circ) + \operatorname{tg} (\alpha - 45^\circ) \\ & \cos^2 (a + b) + \cos^2 (a - b) - \cos 2a \cos 2b \\ & \operatorname{tg} a + 2 \operatorname{tg} 2a + 4 \operatorname{tg} 4a + 8 \operatorname{ctg} 8a. \end{aligned}$$

## Глава IV. Вычисленіе круговыхъ функцій.

64. Вычисленіе круговыхъ функцій приводитъ непосредственно къ составленію числовыхъ таблицъ, въ которыхъ помѣщены соотвѣтственныя значенія угловъ и ихъ функцій. Эта трудная и сложная задача уже выполнена разъ на всегда, и такимъ образомъ облегчено въ высшей степени примѣненіе круговыхъ функцій; дѣйствительно, всѣ вычисленія при переходѣ отъ угловъ къ сторонамъ и обратно теперь сводятся къ простѣйшимъ ариѳметическимъ выкладкамъ надъ числами, взятыми въ готовомъ видѣ изъ таблицъ. Въ виду этого вопросъ о пути, по которому шли составители таблицъ, получаетъ громадный научный и историческій интересъ; прослѣдивъ этотъ путь, мы должны будемъ убѣдиться въ безошибочности и точ-

ности таблицъ, а также проникнутыя благодарностью ко всѣмъ этимъ труженикамъ на пользу человѣчества. Съ этой цѣлью въ настоящей главѣ указаны какъ главныя теоремы, на коихъ основано составленіе таблицъ, такъ и самыя методы и приемы вычисленій.



Черт. 18.

**65. Основные теоремы.** Пользуясь теоремой сложения, а также формулами для функций двойныхъ и половинныхъ угловъ, можно вычислить круговыя функции для различныхъ угловъ I-го квадранта; но мы еще не знаемъ, какъ вычислять функции весьма малыхъ угловъ. Разсмотримъ поэтому слѣдующія три теоремы.

**Теорема I.** Если уголъ  $x$  лежитъ въ I-мъ квадрантѣ, то мы имѣемъ неравенства:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Пусть уголъ  $\angle AOM = x$  (черт. 18). Построимъ линіи синуса и тангенса этого угла: это будутъ прямыя  $MP$  и  $AN$ . Соединивъ затѣмъ прямою точки  $A$  и  $M$ , находимъ, что перпендикуляръ  $MP$  меньше наклонной  $MA$ ; послѣдняя же, въ свою очередь, какъ хорда, меньше дуги  $AM$ . Поэтому и подавно  $MP < \overset{\frown}{AM}$ . Раздѣливъ же обѣ части послѣдняго неравенства на  $OA = R$ , находимъ  $\frac{MP}{R} < \frac{\overset{\frown}{AM}}{R}$ . Но отношеніе  $\frac{MP}{R}$  есть синусъ угла  $x$ , а отношеніе  $\frac{\overset{\frown}{AM}}{R}$  есть круговая мѣра угла  $x$ ; слѣдовательно:

$$\sin x < x.$$

Далѣе, проведемъ изъ точки  $N$  касательную  $NN_1$ ; тогда ломаная  $ANN_1$  больше дуги  $AN_1$  \*); но  $AN = NN_1$ ,  $\cup AM = \cup MN_1$ , поэтому  $ANN_1 = 2AN$ ,  $\cup AN_1 = 2\cup AM$  и  $2AN > 2\cup AM$  или  $AN > \cup AM$ . Раздѣливъ по прежнему обѣ части послѣдняго неравенства на  $OA = R$  и замѣчая, что отношеніе  $\frac{AN}{R}$  есть тангенсъ угла  $x$ , находимъ:

$$\operatorname{tg} x > x.$$

Соединяя оба неравенства въ одно, окончательно получимъ:

$$1) \quad \sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

что и т. д.

**Теорема II.** Если уголъ  $x$  уменьшается до нуля, то предѣлы отношеній  $\frac{\sin x}{x}$  и  $\frac{\operatorname{tg} x}{x}$  равны единицѣ.

Возьмемъ положительный уголъ  $x$ , лежащій въ I-мъ квадрантѣ. На основаніи предыдущей теоремы имѣемъ:

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x};$$

раздѣливъ  $\sin x$  на всѣ члены этого неравенства и замѣчая, что знаки неравенствъ измѣнятся на обратные, находимъ:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

---

\*) Строго говоря, это имѣетъ мѣсто лишь для выпуклыхъ кривыхъ (*принципъ Архимеда*). Выпуклою кривою называется кривая, имѣющая съ прямой не болѣе двухъ точекъ пересѣченія. Къ этой категоріи и принадлежитъ окружность.

Если  $x$  приближается къ предѣлу нуль, тогда  $\lim [\cos x]_{x=0} = 1$  и на основаніи теоремы о предѣлахъ \*) наши неравенства примутъ видъ:

$$1 \geq \lim \left[ \frac{\sin x}{x} \right]_{x=0} \geq 1.$$

Такъ какъ оба предѣла, меньшій и большій, совпали, то очевидно, что  $\lim \left[ \frac{\sin x}{x} \right]_{x=0} = 1$ .

Далѣе имѣемъ:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Раздѣлимъ обѣ части послѣдняго равенства на  $x$ , тогда:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x}.$$

или:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x},$$

Переходя къ предѣламъ, получимъ:

$$\lim \left[ \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right]_{x=0} = \lim \left[ \frac{\sin x}{x} \right]_{x=0} \cdot \lim \left[ \frac{1}{\cos x} \right]_{x=0},$$

$$\lim \left[ \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right]_{x=0} = 1 \cdot \left[ \frac{1}{\lim \cos x} \right]_{x=0},$$

$$\lim \left[ \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right]_{x=0} = \frac{1}{1} = 1.$$

\*) Упомянутая теорема гласитъ слѣдующее: «Если даны двѣ функціи  $f(x)$  и  $F(x)$  и  $f(x) > F(x)$  при всѣхъ значеніяхъ  $x$ , кромѣ  $x=0$ , то

$$\lim [f(x)]_{x=0} \geq \lim [F(x)]_{x=0}.$$

Итакъ:

$$2). \quad \lim \left[ \frac{\sin x}{x} \right]_{x=0} = \lim \left[ \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right]_{x=0} = 1,$$

что и т. д.

**Теорема III.** Если уголъ  $x$  лежитъ въ I-мъ квадрантѣ, то разность между угломъ и его синусомъ меньше четверти куба и даже шестой части куба угла.

А. На основаніи теоремы (1) имѣемъ:

$$\frac{x}{2} < \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad \frac{x}{2} < \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}},$$

или:

$$\frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} < \sin \frac{x}{2}.$$

Съ другой стороны мы имѣли раньше:  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ ; замѣняя въ этомъ равенствѣ  $\sin \frac{x}{2}$  черезъ  $\frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$ , мы уменьшимъ правую часть равенства и, слѣдовательно, получимъ:

$$\sin x > 2 \cdot \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2},$$

или:

$$\sin x > x \cos^2 \frac{x}{2}.$$

Но  $\cos^2 \frac{x}{2} = 1 - \sin^2 \frac{x}{2}$ , поэтому:  $x \cos^2 \frac{x}{2} = x - x \sin^2 \frac{x}{2}$  и  $\sin x > x - x \sin^2 \frac{x}{2}$ .

Если мы теперь во второй части неравенства вмѣсто синуса подставимъ уголъ, то вычитаемое

$x \sin^2 \frac{x}{2}$  увеличится, а, слѣдовательно, разность  $x - x \sin^2 \frac{x}{2}$  уменьшится; такимъ образомъ этой замѣной мы только усилимъ неравенство. Итакъ:

$$\sin x > x - x \cdot \frac{x^2}{4},$$

$$\sin x \leq x - \frac{x^3}{4},$$

$$3) \quad x - \sin x < \frac{x^3}{4},$$

что и т. д.

В. Для доказательства второй части теоремы проще всего поступить такъ. Возьмемъ формулу для синуса тройного угла:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x;$$

перепишемъ эту формулу такъ:

$$3 \sin x - \sin 3x = 4 \sin^3 x$$

и подставимъ въ нее послѣдовательно вмѣсто  $x$  величины:  $\frac{x}{3}, \frac{x}{3^2}, \frac{x}{3^3}, \dots, \frac{x}{3^n}$ ; тогда получимъ рядъ слѣдующихъ равенствъ:

$$3 \sin \frac{x}{3} - \sin x = 4 \sin^3 \frac{x}{3},$$

$$3 \sin \frac{x}{3^2} - \sin \frac{x}{3} = 4 \sin^3 \frac{x}{3^2},$$

$$3 \sin \frac{x}{3^3} - \sin \frac{x}{3^2} = 4 \sin^3 \frac{x}{3^3},$$

$$\dots \dots \dots ,$$

$$\dots \dots \dots ,$$

$$3 \sin \frac{x}{3^n} - \sin \frac{x}{3^{n-1}} = 4 \sin^3 \frac{x}{3^n}.$$

Помножимъ соотвѣтственно эти равенства на 1, 3,  $3^2$ , ...,  $3^{n-1}$  и затѣмъ сложимъ ихъ почленно; тогда всѣ члены, стоящіе въ лѣвыхъ частяхъ равенствъ, взаимно уничтожатся, за исключеніемъ вторыхъ членовъ съ начала и конца, и мы получимъ новое равенство:

$$3^n \sin \frac{x}{3^n} - \sin x = 4 \left[ \sin^3 \frac{x}{3} + 3 \sin^3 \frac{x}{3^2} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n} \right] \quad (\alpha).$$

Выраженіе  $3^n \sin \frac{x}{3^n}$  можно преобразовать такъ:

$$3^n \sin \frac{x}{3^n} = x \cdot 3^n \frac{\sin \frac{x}{3^n}}{\frac{x}{3^n}} = x \cdot \frac{\sin \frac{x}{3^n}}{\left( \frac{x}{3^n} \right)}.$$

Далѣе, замѣнимъ въ правой части равенства (α) всѣ синусы углами; но такъ какъ синусъ меньше угла, то правая часть увеличится и мы получимъ неравенство:

$$x \cdot \frac{\sin \left( \frac{x}{3^n} \right)}{\left( \frac{x}{3^n} \right)} - \sin x < 4 \left[ \frac{x^3}{3^3} + \frac{x^3}{3^5} + \dots + \frac{x^3}{3^{2n+1}} \right] \quad (\beta).$$

Выраженіе въ квадратныхъ скобкахъ есть сумма убывающей геометрической прогрессіи со знаменателемъ  $\frac{1}{3^2}$ ; при  $n = \infty$  эта сумма обратится въ  $\frac{x^3}{6}$ , такъ какъ:

$$4 \frac{x^3}{3^3} : \left( 1 - \frac{1}{3^2} \right) = 4 \frac{x^3}{3^3} : \frac{8}{9} = \frac{x^3}{6}.$$

Съ другой стороны, при  $n = \infty$ , выраженіе  $\frac{\sin \left( \frac{x}{3^n} \right)}{\left( \frac{x}{3^n} \right)}$

обращается въ единицу; слѣдовательно, неравенство (β) окончательно приметъ видъ:

$$4) \quad x - \sin x < \frac{x^3}{6},$$

что и т. д.

**66. Предѣлы синуса.** Изложенныя теоремы позволяютъ намъ найти предѣлы, между которыми заключается  $\sin x$ , если независимая переменная  $x$  лежитъ въ I-мъ квадрантѣ. Именно, изъ неравенствъ (1) и (3) непосредственно заключаемъ, что высшій предѣлъ  $\sin x$  есть  $x$ , а низшій — разность  $x - \frac{x^3}{4}$ . Итакъ, если имѣетъ мѣсто неравенство  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , то:

$$5) \quad x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x.$$

**67. Предѣлы косинуса.** Для нахожденія предѣловъ косинуса нѣтъ надобности разсматривать вопросъ съ начала: достаточно примѣнить предыдущія изслѣдованія. Возьмемъ независимую переменную  $x$ , удовлетворяющую неравенствамъ  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ; тогда по формулѣ двойного угла имѣемъ:

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \dots (\alpha).$$

Для нахожденія низшаго предѣла замѣнимъ  $\sin \frac{x}{2}$  угломъ  $\frac{x}{2}$ ; тогда разность, стоящая въ правой части послѣдняго равенства, уменьшится и приметъ видъ  $1 - \frac{x^2}{2}$ , что даетъ намъ первое изъ искомымъ неравенствъ:

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Чтобы найти высшій предѣлъ, замѣнимъ  $\sin \frac{x}{2}$  разностью  $\frac{x}{2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{4}$ , вслѣдствіе чего правая часть

равенства (α) увеличится и приметъ видъ  $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^4}{16} - 2\left(\frac{x^3}{32}\right)^2$ . Если мы отбросимъ теперь послѣдній членъ, то все выраженіе увеличится и такимъ образомъ получимъ второе неравенство :

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

Соединяя оба неравенства вмѣстѣ, находимъ иско-  
мые предѣлы косинуса :

$$6) \quad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

68. На основаніи изложеннаго выше мы можемъ теперь установить простой пріемъ для вычисленія синусовъ и косинусовъ малыхъ угловъ. Дѣло въ томъ, что разность между двумя предѣлами синуса равна  $\frac{x^3}{4}$ , такъ какъ  $x - \left(x - \frac{x^3}{4}\right) = \frac{x^3}{4}$ , а разность между двумя предѣлами косинуса равна  $\frac{x^4}{16}$ , такъ какъ  $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^4}{16}$ ; обѣ эти разности весьма малы при достаточно маломъ  $x$ , поэтому можно съ большою точностью принять для малыхъ угловъ:

$$7) \quad \sin x = x \text{ и } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Нетрудно найти при этомъ и величину ошибки: для синуса она меньше  $\frac{x^3}{4}$ , а для косинуса — меньше  $\frac{x^4}{16}$ .

69. Вычисленіе  $\sin 1'$  и  $\cos 1'$ . Приложимъ найден-  
ный нами пріемъ къ вычисленію синуса и косинуса

одной минуты. Такъ какъ кр. м.  $l' = \frac{\pi}{180.60}$ , то при  $\pi = 3,14159$  получимъ:

$$x = 0,00029 \text{ и } 1 - \frac{x^2}{2} = 0,99999;$$

ошибка въ первомъ случаѣ меньше  $\frac{x^3}{4}$ , а  $\frac{x^3}{4}$ , въ свою очередь, меньше  $\frac{0,0003^3}{4} = \frac{27}{4 \cdot 10^{12}} = \frac{27}{40} \cdot \frac{1}{10^{11}}$ , т. е. окончательно, ошибка меньше  $\frac{1}{10^{11}}$ . Точно также найдемъ и во второмъ случаѣ, что ошибка меньше  $\frac{1}{10^{15}}$ . Итакъ, первые пять десятичныхъ знаковъ вѣрны, слѣдовательно, мы можемъ по формулѣ (7) принять:

$$\sin l' = 0,00029 \text{ и } \cos l' = 0,99999.$$

**70. Формулы Симпсона.** Для перехода отъ  $\sin l'$  и  $\cos l'$  къ синусамъ и косинусамъ кратныхъ угловъ воспользуемся важными формулами, выведенными англійскимъ математикомъ Томасомъ Симпсономъ (1748).

Возьмемъ выраженія  $\sin(\alpha \pm \beta)$  и  $\cos(\alpha \pm \beta)$ , а именно:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Складывая первое равенство со вторымъ, а затѣмъ третье съ четвертымъ и производя упрощенія, получимъ:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta.$$

Положимъ теперь  $\alpha = n\beta$ , тогда двѣ послѣднія формулы примутъ видъ:

$$\sin (n+1)\beta + \sin (n-1)\beta = 2 \sin n\beta \cos \beta,$$

$$\cos (n+1)\beta + \cos (n-1)\beta = 2 \cos n\beta \cos \beta,$$

и мы приходимъ къ формуламъ Симпсона:

$$8) \quad \begin{cases} \sin (n+1)\beta = 2 \sin n\beta \cos \beta - \sin (n-1)\beta, \\ \cos (n+1)\beta = 2 \cos n\beta \cos \beta - \cos (n-1)\beta. \end{cases}$$

71. Примѣненіе этихъ формулъ весьма просто. Для этого положимъ  $\beta = 1'$  и будемъ давать числу  $n$  послѣдовательно значенія: 1, 2, 3, .... Тогда при  $n=1$  получимъ:

$$\sin 2' = 2 \sin 1' \cos 1',$$

$$\cos 2' = 2 \cos^2 1' - 1,$$

что вполне совпадаетъ съ результатами, полученными при помощи формулъ удвоенія. Далѣе находимъ:

$$\sin 3' = 2 \sin 2' \cos 1' - \sin 1'; \quad \cos 3' = 2 \cos 2' \cos 1' - \cos 1';$$

$$\sin 4' = 2 \sin 3' \cos 1' - \sin 2'; \quad \cos 4' = 2 \cos 3' \cos 1' - \cos 2';$$

$$\sin 5' = 2 \sin 4' \cos 1' - \sin 3'; \quad \cos 5' = 2 \cos 4' \cos 1' - \cos 3';$$

Такимъ образомъ, зная  $\sin 1'$  и  $\cos 1'$ , мы можемъ продолжить вычисленіе круговыхъ функцій черезъ  $1'$  сколь угодно далеко. Но лучше продолжать это вычисленіе только до  $\sin 30^\circ$  и  $\cos 30^\circ$ , такъ какъ дальнѣйшія значенія функцій можно найти при помощи предыдущихъ слѣдующимъ образомъ.

72. Возьмемъ формулы :

$$\begin{aligned}\sin (\alpha +\beta )+\sin (\alpha -\beta ) &=2 \sin \alpha \cos \beta , \\ \cos (\alpha +\beta )-\cos (\alpha -\beta ) &=-2 \sin \alpha \sin \beta ,\end{aligned}$$

и положимъ въ нихъ  $\alpha =30^{\circ}$ , тогда :

$$\begin{aligned}\sin (30^{\circ} +\beta )+\sin (30^{\circ} -\beta ) &=2 \sin 30^{\circ} \cos \beta , \\ \cos (30^{\circ} +\beta )-\cos (30^{\circ} -\beta ) &=-2 \sin 30^{\circ} \sin \beta ;\end{aligned}$$

замѣчая, что  $\sin 30^{\circ} =\frac{1}{2}$ , и перенося вторые члены обоихъ равенствъ вправо, находимъ:

$$9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin (30^{\circ} +\beta )=\cos \beta -\sin (30^{\circ} -\beta ) \\ \cos (30^{\circ} +\beta )=\cos (30^{\circ} -\beta )-\sin \beta . \end{array} \right.$$

Давая  $\beta$  послѣдовательно значенія:  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ , ..., по этимъ формуламъ получимъ:

$$\begin{aligned}\sin 30^{\circ} 1' &= \cos 1' -\sin 29^{\circ} 59'; \cos 30^{\circ} 1' = \cos 29^{\circ} 59' -\sin 1'; \\ \sin 30^{\circ} 2' &= \cos 2' -\sin 29^{\circ} 58'; \cos 30^{\circ} 2' = \cos 29^{\circ} 58' -\sin 2'; \\ \sin 30^{\circ} 3' &= \cos 3' -\sin 29^{\circ} 57'; \cos 30^{\circ} 3' = \cos 29^{\circ} 57' -\sin 3';\end{aligned}$$

Такимъ образомъ мы вычислимъ значенія круговыхъ функцій для угловъ отъ  $30^{\circ}$  до  $45^{\circ}$  и на этомъ остановимся. Функціи дальнѣйшихъ угловъ — отъ  $45^{\circ}$  до  $90^{\circ}$  — найдутся по формуламъ:

$$\begin{aligned}\sin (45^{\circ} +\alpha ) &= \cos (45^{\circ} -\alpha ), \\ \cos (45^{\circ} +\alpha ) &= \sin (45^{\circ} -\alpha ),\end{aligned}$$

извѣстнымъ намъ уже раньше. Этимъ и будетъ закончено все вычисленіе.

**73. Повѣрка вычисленій.** Результаты нашей работы, въ виду ихъ громаднаго значенія, необходимо подвергнуть тщательной повѣркѣ. Этого достигаютъ различными способами.

Во первыхъ, пользуясь формулами для двойныхъ и половинныхъ угловъ, вычисляютъ синусы и косинусы многихъ угловъ и затѣмъ сравниваютъ ихъ значенія съ найденными по формуламъ Симпсона; такъ, на примѣръ, можно найти значенія синусовъ и косинусовъ угловъ, кратныхъ  $\frac{\pi}{60}$  (т. е.  $3^\circ$ ), выраженныхъ въ радикалахъ; вычисливъ эти радикалы съ желаемой степенью точности, на примѣръ, съ 5-ю десятичными знаками, мы составимъ независимый рядъ значеній синусовъ и косинусовъ, которымъ можно прекрасно пользоваться въ цѣляхъ повѣрки нашихъ вычисленій.

Во вторыхъ, для повѣрки можно воспользоваться формулами Эйлера и Лежандра, а именно:

$$\begin{aligned} 3) \quad \sin \alpha + \sin (72^\circ + \alpha) - \sin (72^\circ - \alpha) = \\ = \sin (36^\circ + \alpha) - \sin (36^\circ - \alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Л) \quad \sin (90^\circ - \alpha) = \sin (54^\circ + \alpha) + \sin (54^\circ - \alpha) - \\ - \sin (18^\circ + \alpha) - \sin (18^\circ - \alpha). \end{aligned}$$

**74. Таблицы круговыхъ функцій.** Итакъ, способы вычисленій найдены; мы можемъ выбрать произвольный промежутокъ, на примѣръ,  $1^\circ$ ,  $1'$ ,  $10''$ ,  $1''$  и т. п., и составить рядъ значеній гониометрическихъ функцій для угловъ, различающихся на выбранный промежутокъ. Такъ поступили Гиппархъ и Птоломей, составители первыхъ таблицъ, и такъ продолжали ихъ дѣло позднѣйшіе составители. Эти таблицы натуральныхъ круговыхъ функцій продержались, однако, во

ясеобщемъ употребленіи лишь до начала XVII столѣтія.

Открытіе логариѣмовъ отодвинуло ихъ на задній планъ, замѣнивъ таблицами *логариѣмовъ* этихъ функцій. Преимущества новыхъ таблицъ, равно какъ и способъ ихъ примѣненія, были уже рассмотрѣны въ I-ой части.

**75. Интерполированіе.** Весьма часто, по условіямъ заданія, приходится отыскивать функціи угловъ, не помѣщенныхъ въ таблицахъ, т.-е. выраженныхъ въ градусахъ, минутахъ, секундахъ и ихъ частяхъ; равнымъ образомъ приходится находить и углы, соотвѣтствующіе такимъ значеніямъ функцій (или ихъ логариѣмовъ), которыя тоже не помѣщены въ таблицахъ. На практикѣ оба эти вопроса рѣшаются весьма легко при помощи особыхъ табличекъ, такъ называемыхъ «*Partes proportionales*», помѣщенныхъ во всѣхъ таблицахъ логариѣмовъ; мы уже знаемъ изъ I-ой части, какъ ими пользоваться.

Устройство упомянутыхъ табличекъ основано на слѣдующихъ теоремахъ.

**76. Теорема IV.** Если угловые интервалы достаточно малы, то разности круговыхъ функцій приблизительно пропорціональны разностямъ соотвѣтствующихъ угловъ.

Пусть  $h$  составляетъ весьма малое приращеніе (не болѣе  $1'$ ) нѣкоего угла  $x$ , лежащаго въ I-мъ квадрантѣ. Согласно формулѣ имѣемъ:

$$\sin (x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h.$$

Такъ какъ  $h$  достаточно мало, то мы можемъ положить:  $\cos h = 1$  и  $\sin h = h$ ; наше равенство приметъ тогда видъ:

$$\sin (x+h)=\sin x+h \cos x,$$

откуда:

$$\sin (x+h)-\sin x=h \cos x \ldots \ldots (\alpha).$$

Взявъ другое весьма малое приращеніе  $h_1$ , подобно предыдущему получимъ:

$$\sin (x+h_1)-\sin x=h_1 \cos x \ldots \ldots (\beta).$$

Раздѣливъ  $(\alpha)$  на  $(\beta)$ , окончательно получимъ:

$$10) \quad \frac{\sin (x+h)-\sin x}{\sin (x+h_1)-\sin x}=\frac{h}{h_1},$$

что и т. д.

Эту теорему легко доказать и для косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ, что предоставляется учащимся.

**77. Теорема V.** Если угловые интервалы достаточно малы, то разности логарифмовъ круговыхъ функций приблизительно пропорціональны разностямъ соответствующихъ угловъ.

Возьмемъ предыдущее приближительное равенство  $(\alpha)$  :

$$\sin (x+h)-\sin x=h \cos x$$

и раздѣлимъ всѣ члены его на  $\sin x$

$$\frac{\sin (x+h)}{\sin x}=1+h \operatorname{ctg} x.$$

Логарифмируя обѣ части, получаемъ:

$$\lg \sin (x+h)-\lg \sin x=\lg (1+h \operatorname{ctg} x).$$

Мы выбираемъ  $h$  такимъ, чтобы произведение  $h \operatorname{ctg} x$  было меньше 1; въ алгебрѣ же доказывается, что тогда:

$$\lg(1+h \operatorname{ctg} x) = M \left[ h \operatorname{ctg} x - \frac{h^2 \operatorname{ctg}^2 x}{2} + \frac{h^3 \operatorname{ctg}^3 x}{3} - \dots \right]^*),$$

гдѣ  $M$  есть модуль системы логарифмовъ при основаніи 10. Ограничиваясь первымъ членомъ этого разложенія, находимъ:

$$\lg(1+h \operatorname{ctg} x) = Mh \operatorname{ctg} x$$

и

$$\lg \sin(x+h) - \lg \sin x = Mh \operatorname{ctg} x \dots (\gamma).$$

Точно также, при достаточно маломъ  $h_1$  находимъ:

$$\lg \sin(x+h_1) - \lg \sin x = Mh_1 \operatorname{ctg} x \dots (\delta).$$

Раздѣливъ  $(\gamma)$  на  $(\delta)$ , окончательно получимъ:

$$11) \quad \frac{\lg \sin(x+h) - \lg \sin x}{\lg \sin(x+h_1) - \lg \sin x} = \frac{h}{h_1},$$

что и т. д.

Предоставляется учащимся доказать эту теорему для случая косинусовъ, тангенсовъ и котангенсовъ.

78. На данныхъ двухъ теоремахъ основывается приѣмъ интерполированія. Табличныя разности приравнены къ постояннымъ интеграламъ въ 1' или въ 10'', смотря по таблицамъ; другой интервалъ находится по даннымъ задачи.

79. **Предѣлы для интерполированія.** Тѣ допущенія, которыя мы ввели при доказательствѣ предыдущихъ

\*) Формула разложенія въ безконечный рядъ функцій  $\lg(1+x)$ , а именно

$$\lg(1+x) = M \left[ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right]$$

можетъ быть выведена безъ помощи Дифференціального исчисленія.

теоремъ, могутъ все-таки повліять на точность нашихъ вычисленій; поэтому необходимо разсмотрѣть, при какихъ условіяхъ первые пять десятичныхъ знаковъ не измѣнятся. Мы отбросили въ разложеніи  $\lg(1 + h \operatorname{ctg} x)$  всѣ члены, начиная со второго; такъ какъ  $h$  достаточно мало, то его квадратъ и кубъ еще того меньше; поэтому мы а priori заключаемъ, что наибольшая замѣтная погрѣшность получается при отбрасываніи второго члена разложенія, а именно  $\frac{1}{2} Mh^2 \operatorname{ctg}^2 x$ . Если ошибка должна быть меньше пятаго десятичнаго знака, то должно имѣть мѣсто неравенство:

$$\frac{1}{2} Mh^2 \operatorname{ctg} x < \frac{1}{10^5}.$$

По условію имѣемъ:  $h < 1'$ ,  $M = 0,43429448 \dots$ ; поэтому  $h < 3 \cdot \frac{1}{10^4}$  (въ радіанахъ),  $M < \frac{1}{2}$  и наше неравенство приметъ видъ:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{1}{10^8} \operatorname{ctg}^2 x < \frac{1}{10^5},$$

откуда:

$$\operatorname{ctg}^2 x < \frac{4}{9} 10^3,$$

$$\operatorname{ctg} x < \frac{20}{3} \sqrt{10},$$

$$\operatorname{ctg} x < 21.$$

По таблицамъ находимъ, что  $\operatorname{ctg} 3^\circ < 21 < \operatorname{ctg} 2^\circ$ ; поэтому мы заключаемъ, что уголъ  $x$  не долженъ быть меньше  $3^\circ$ . Съ другой стороны  $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}(90^\circ - x)$  и  $\operatorname{tg} 87^\circ < 21 < \operatorname{tg} 88^\circ$ , т.-е. уголъ  $x$  не долженъ превышать  $87^\circ$ . Сопоставляя найденные результаты мы приходимъ къ выводу, что табличными разно-

стями (*partes proportionales*) можно пользоваться при нахождении угловъ *въ предѣлахъ отъ 3° до 87°*. Къ угламъ же, не заключающимся въ этихъ предѣлахъ, интерполированіе непримѣнимо и приходится искать другіе пути для рѣшенія вопроса.

**80. Формулы Делямбра.** Французскій астрономъ Делямбръ (1749 — 1822) далъ двѣ важныя формулы, носящія его имя, при помощи которыхъ вычисляются весьма просто синусы и тангенсы малыхъ угловъ, съ достаточной степенью точности. Эти формулы можно вывести слѣдующимъ простымъ способомъ.

Возьмемъ уголъ, содержащій  $n''$ , и пусть круговая мѣра этого угла есть  $x$ . При  $n=1$  мы имѣемъ приближительное равенство:

$$\sin 1'' = \text{кр. м. } 1'' \quad . . (A),$$

причемъ ошибка не вліяетъ на пять первыхъ десятичныхъ знаковъ. Составимъ далѣе пропорцію:

$$x : \text{кр. м. } 1'' = n'' : 1'',$$

откуда  $x = n \cdot (\text{кр. м. } 1'')$  или, согласно равенству (A):

$$x = n \cdot \sin 1'' \quad . . . . (B).$$

Возьмемъ теперь равенство:  $\sin x = \sin n''$  и раздѣлимъ обѣ части его на  $x$ :

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin n''}{n''};$$

въ силу же равенства (B) получимъ:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin n''}{n \cdot \sin 1''} \quad . . . . (C).$$

Логарифмируемъ обѣ части послѣдняго равенства

$$\lg \frac{\sin x}{x} = \lg \sin n'' - \lg n - \lg \sin 1'',$$

откуда:

$$\lg \sin n'' = \lg n + \lg \sin 1'' + \lg \frac{\sin x}{x} \quad (C_1).$$

Если  $n$  дано, то  $\lg n$  мы найдемъ по таблицамъ; второй членъ правой части есть величина постоянная и можетъ быть вычислена легко; поэтому найдемъ лишь приближенное значеніе послѣдняго члена. По теоремѣ III имѣемъ приближительное равенство:  $\sin x = x - \frac{x^3}{6}$ , откуда:  $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6}$ , слѣдовательно:  $\lg \frac{\sin x}{x} = \lg \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)$ . Такъ какъ  $\frac{x^2}{6} < 1$ , то согласно предыдущему (теорема V) можно положить:

$$\lg \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) = -\frac{M}{6} x^2,$$

причемъ отброшенные члены не вліяютъ на первые пять десятичныхъ знаковъ. Итакъ:

$$\lg \frac{\sin x}{x} = -\frac{M}{6} x^2$$

и окончательно:

$$\lg \sin n'' = \lg n + \lg \sin 1'' - \frac{M}{6} x^2 \dots \dots (D_1).$$

Это и есть первая формула Делямбра. Для полученія второй поступимъ такъ. Имѣемъ:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} n'', \\ \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= \frac{\operatorname{tg} n''}{n \cdot \sin 1''}, \end{aligned}$$

$$\lg \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lg \operatorname{tg} n'' - \lg n - \lg \sin 1'',$$

$$\lg \operatorname{tg} n'' = \lg n + \lg \sin 1'' + \lg \frac{\operatorname{tg} x}{x} \dots \dots (C_{II}).$$

Остается найти величину  $\lg \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ . Такъ какъ  $\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$ , то мы замѣнимъ первую дробь черезъ  $1 - \frac{x^2}{6}$ , а вторую — черезъ  $\frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}}$  [согласно формулѣ (7), пунктъ 5].

Подставляя, получимъ:

$$\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}}\right) = \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2}\right),$$

если пренебречь дальнѣйшими членами частнаго. Далѣе перемноженіе даетъ:

$$\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}.$$

Отбрасывая послѣдній членъ въ виду его малости и упрощая оставшееся выраженіе, находимъ:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= 1 + \frac{2}{6} x^2, \\ \lg \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= \lg \left(1 + \frac{2}{6} x^2\right), \\ \lg \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= \frac{2M}{6} x^2. \end{aligned}$$

Итакъ мы пришли ко второй формулѣ Десямбра:

$$\lg \operatorname{tg} n'' = \lg n + \lg \sin 1'' + \frac{2M}{6} x^2 \dots (D_{II}).$$

Введемъ обозначенія:

$$\begin{aligned} S_0 &= \lg \sin 1'', \\ \sigma &= \frac{Mx^2}{6}; \end{aligned}$$

тогда обѣ формулы примутъ такой видъ:

$$\text{Д)} \quad \begin{cases} \lg \sin n'' = \lg n + S_0 - \sigma, \\ \lg \operatorname{tg} n'' = \lg n + S_0 + 2\sigma. \end{cases}$$

81. Величины  $S_0$  и  $\sigma$  вычислены и помѣщаются въ особыхъ табличкахъ Делямбра. Эти таблички расположены на верху каждой страницы I-ой таблицы Глазенапа;  $S_0$  постоянно и равно 4,685575—10;  $\sigma$  зависитъ отъ  $x$  и выражается весьма малою дробью, гдѣ первая значущая цифра стоитъ на пятомъ мѣстѣ послѣ запятой, т.-е.  $\sigma$  и  $2\sigma$  выражены въ единицахъ пятого десятичнаго знака.

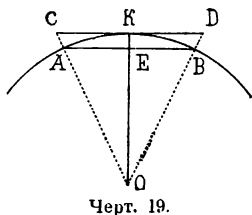
Способы нахождения логарифмовъ функцій по даннымъ малымъ угламъ, и обратно, приводятъ, слѣдовательно, къ простому сложенію и вычитанію чиселъ, взятыхъ въ готовомъ видѣ изъ таблицъ. Слѣдующіе примѣры покажутъ намъ, что отысканіе подобныхъ логарифмовъ и угловъ встрѣчается часто на практикѣ.

### Примѣры.

**Примѣръ I.** Найти  $\pi$  съ точностью до пятого десятичнаго знака, пользуясь многоугольникомъ о 21600 сторонахъ, вписанныхъ въ кругъ, радіусъ коего  $\frac{1}{2}$  единицы длины.

Пусть  $a_n$  и  $b_n$  суть соотвѣтственно стороны правильныхъ вписаннаго и описаннаго  $n$  — угольниковъ и  $R$  — радіусъ круга; тогда  $AB = a_n$ ,  $CD = b_n$ ,  $OA = OK = OB = R$  (черт. 19). Изъ  $\triangle AEO$  находимъ:  $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$ , а изъ  $\triangle CKO$ :  $b_n =$

$= 2R \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$ . Далѣе, называя черезъ  $p$  и  $P$  периметры вписаннаго и описаннаго многоугольниковъ, имѣемъ:



$$p = na_n = 2Rn \sin \frac{180^\circ}{n},$$

$$R = nb_n = 2Rn \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n},$$

или, подставляя вмѣсто  $R$  и  $n$  ихъ значенія:

$$\Gamma) \quad \begin{cases} p = 21600 \sin 30'', \\ P = 21600 \operatorname{tg} 30''. \end{cases}$$

Вычислимъ каждый изъ этихъ периметровъ при помощи логарифмовъ.

| Вычисленіе $p$ .                     | Вычисленіе $P$ .                                  |
|--------------------------------------|---------------------------------------------------|
| $\lg p = \lg 21600 + \lg \sin 30'';$ | $\lg P = \lg 21600 + \lg \operatorname{tg} 30'';$ |
| $\lg p = 4,33445 + 6,16270 - 10;$    | $\lg P = 4,33445 + 6,16270 - 10;$                 |
| $\lg p = 0,49715;$                   | $\lg P = 0,49715;$                                |
| $p = 3,14159.$                       | $P = 3,14159.$                                    |

Такимъ образомъ мы нашли:  $p = P = 3,14159$  съ точностью до пятого десятичнаго знака. А такъ какъ мы имѣли въ Геометріи неравенство:

$$p < \pi < P,$$

то мы заключаемъ, что  $\pi = 3,14159$  съ точностью до пятого десятичнаго знака.

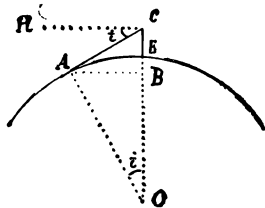
**Примѣръ II.** Найти радіусъ земного шара, зная, что уголъ  $i$  пониженія горизонта на высотѣ  $h = 2$  метр. человѣческаго роста составляетъ около  $2' 44''$ .

Пусть  $CE=h$ ,  $EO=AO=R$ ; тогда (чер. 20) угол  $HCA=i$  будетъ угломъ пониженія горизонта для точки  $C$ . Далѣе,  $CA$  есть лучъ зрѣнія, касательный къ поверхности земли въ точкѣ  $A$ , слѣдовательно, уголъ  $CAO$  прямой. Опустимъ теперь изъ  $A$  перпендикуляръ  $AB$ ; тогда въ треугольникѣ  $ACO$  катетъ  $AO$  есть средняя пропорциональная между  $OC$  и  $OB$ , т. е.

$$OC : OA = OA : OB$$

или

$$(R+h) : R = R : OB.$$



Черт. 20.

Замѣчая, что уголъ  $AOB$  равенъ  $i$  (стороны обоихъ угловъ взаимно перпендикулярны), изъ  $\Delta AOB$  находимъ  $OB=R \cos i$ , поэтому

$$R+h=\frac{R}{\cos i},$$

откуда, послѣ простыхъ преобразованій, получается выраженіе для  $R$

$$R=\frac{h \cos i}{1-\cos i}.$$

Это выраженіе можно привести къ логариѣмируемому виду, т. к.

$$\frac{\cos i}{1-\cos i}=\frac{\cos i}{2 \sin^2 \frac{i}{2}}=\frac{\cos i \cos \frac{i}{2}}{2 \sin \frac{i}{2} \cos \frac{i}{2} \sin \frac{i}{2}}=\frac{1}{\operatorname{tg} i \operatorname{tg} \frac{i}{2}}.$$

Итакъ

$$R=\frac{h}{\operatorname{tg} i \cdot \operatorname{tg} \frac{i}{2}}.$$

Подставляя вмѣсто  $h$  и  $i$  ихъ значенія и выражая  $h$  въ частяхъ километра, окончательно получимъ

$$R = \frac{1}{500 \operatorname{tg} 164'' \operatorname{tg} 82''}.$$

Логариэмируя обѣ части послѣдняго равенства, находимъ  $\lg R = 3,80123$ , откуда

$$R = 6327,4 \text{ км.}$$

По Клерку радіусъ земли измѣняется въ предѣлахъ отъ 6357 км. до 6378 км., слѣдовательно, нашъ приближенный способъ далъ довольно точный результатъ.

**Примѣръ III.** Найти аберрацію свѣтила, находящагося въ полюсѣ эклиптики.

Пусть  $v = 30 \frac{\text{км.}}{\text{сек.}}$  есть скорость движенія земли,  $V = 300000 \frac{\text{км.}}{\text{сек.}}$  есть скорость свѣта. Называя абераціонный уголъ черезъ  $\alpha$ , имѣемъ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{V},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,0001.$$

Логариэмируя, находимъ:

$$\lg \operatorname{tg} \alpha = 6,00000 - 10,$$

$$\lg \alpha = \lg \operatorname{tg} \alpha - S_0 - 2\sigma,$$

$$\lg \alpha = 1,31441,$$

$$\alpha = 20'',626.$$


---

### Задачи для рѣшенія.

1. Горизонтальный параллакс солнца  $8''.8$ ; определить разстояніе солнца отъ земли.

2. Видимый діаметръ солнца  $32'$ ; найти его радіусъ.

3. Лунный параллаксъ  $57'18''$ ; определить разстояніе луны отъ земли.

4. На какомъ разстояніи отъ глаза надо поставить кружокъ 1 дюймъ въ діаметрѣ, чтобы онъ закрылъ солнце?

5. На башнѣ  $AB$  въ 200 футъ вышины поставленъ шпиль  $BC$  въ 1 футъ вышины. Подъ какимъ угломъ зрѣнія онъ представится наблюдателю, глазъ котораго находится въ точкѣ  $D$ , лежащей въ одной горизонтальной плоскости съ основаніемъ  $A$  башни и въ разстояніи 100 фут. отъ нея?

6. Если уголъ зрѣнія меньше  $40''$ , то мы уже не можемъ видѣть предмета. Какова должна быть длина аллеи, если, ставъ по срединѣ, мы видимъ ее на обоихъ концахъ сливающейся?

7. Аэростатъ діаметромъ въ 1 саж. видѣнъ подъ угломъ въ  $4'34''$ . Какъ далеко онъ находится отъ мѣста наблюденія?

8. Корабль движется равномерно со скоростью  $5 \frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$ ; на немъ поставлено орудіе такъ, что направленіе движенія ядра перпендикулярно къ направленію движенія корабля. Зная, что скорость ядра  $400 \frac{\text{метр.}}{\text{сек.}}$ , найти, на какой уголъ надо отклонить орудіе, чтобы ядро попало въ цѣль, находящуюся на разстояніи 400 метр.?

9. Наклонныя Болонскія башни, Азинелли и Гаризенда, высятся на 97 метр. и 49 метр. и отстоятъ отъ отвѣснаго положенія соотвѣтственно на 1,23 метр. и 2,4 метр. Подъ какими углами наклонены онѣ къ горизонту?

10. На какую высоту надо подняться надъ землею, чтобы уголъ пониженія горизонта составилъ  $2^{\circ} 49' 50''$ ? Радиусъ земли  $R = 6378$  клметр.

82. **Точность пятизначныхъ таблицъ.** Мнѣ осталось рассмотреть вопросъ о точности какъ тѣхъ величинъ, которыя помѣщены въ таблицахъ, такъ и вычисленій, производимыхъ при ихъ помощи. Эта точность для насъ существенно необходима и крайне важна, зависеть же она отъ нѣсколькихъ условій, которыя я здѣсь рассмотрю отдѣльно.

А. Прежде всего необходимо убѣдиться, съ какой точностью вычислены тѣ значенія круговыхъ функцій, какія помѣщены въ таблицахъ. Мы уже знаемъ, что вычисленіе  $\sin 1'$  было сдѣлано съ точностью до *одинадцатаго* десятичнаго знака. Если сохранить эту точность и при послѣдующихъ вычисленіяхъ, то есть брать значенія синусовъ и косинусовъ съ *одинадцатью* десятичными знаками, то, при помощи особыхъ изслѣдованій \*), можно легко убѣдиться въ томъ, что всѣ табличныя значенія синусовъ и косинусовъ будутъ вѣрны до половины шестого десятичнаго знака, т. е. ошибка меньше  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^6}$ .

В. Вычисленія, производимыя при помощи таблицъ

---

\*) Смотри, напримѣръ, Серре, Тригонометрія, глава II.

логариѳмовъ круговыхъ функцій, могутъ имѣть различную точность, въ зависимости отъ двухъ условій: во I-хъ, отъ величины табличныхъ интерваловъ, и, во II-хъ, отъ числа десятичныхъ знаковъ въ логариѳмахъ круговыхъ функцій. Между этими двумя условіями существуетъ тѣсная связь. Дѣйствительно, пусть при интервалѣ въ 1'' логариѳмы вычислены съ пятью десятичными знаками. Тогда, напримѣръ,  $\log \sin 39^\circ 24'$ ,  $\log \sin 39^\circ 24' 1''$ ,  $\log \sin 39^\circ 24' 2''$  выразятся однимъ и тѣмъ же числомъ 9,80182; а число 9,88803 будетъ логариѳмомъ косинуса одного изъ 4-хъ слѣдующихъ угловъ:  $39^\circ 24'$ ,  $39^\circ 24' 1''$ ,  $39^\circ 24' 2''$ ,  $39^\circ 24' 3''$ . Эти примѣры показываютъ намъ, что при интервалѣ въ 1'' пяти десятичныхъ знаковъ недостаточно; вотъ почему въ пятизначныхъ таблицахъ взяты интервалы въ 1', даже немного больше тѣхъ, которые допускаетъ число десятичныхъ знаковъ.

С. Независимо отъ всѣхъ предосторожностей и поправокъ, табличныя величины суть только приближенныя значенія круговыхъ функцій (или ихъ логариѳмовъ); поэтому, при опредѣленіи по даннымъ величинамъ соответствующихъ имъ угловъ, мы всегда дѣлаемъ ошибку. Эта ошибка различна для различныхъ функцій. Въ самомъ дѣлѣ, при интервалѣ въ  $1' = 60''$  и разности  $d$  логариѳмовъ синусовъ находимъ, что 1 стотысячная (т. е. единица пятой десятичной цифры) соответствуетъ угловой дроби  $\frac{60''}{d}$ . Для двухъ угловъ, разность которыхъ меньше  $\frac{60''}{d}$ , мы имѣемъ, слѣдовательно, одинаковые пятизначные логариѳмы ихъ синусовъ; такимъ образомъ, высшій предѣлъ ошибки при нахожденіи угла есть  $\frac{60''}{d}$ . Отсюда ясно, что чѣмъ

больше  $d$ , тѣмъ меньше неизбежная ошибка; а такъ какъ для каждой функціи (синусъ, косинусъ, тангенсъ, котангенсъ)  $d$  вообще различно, то остается рассмотретьъ каждую изъ нихъ отдѣльно.

Разсматривая таблицы логариемовъ круговыхъ функцій, мы приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1. При возрастаніи угла отъ  $0^\circ$  до  $90^\circ$  табличная разность  $d$  для синусовъ все время уменьшается. Такъ, около  $12^\circ$   $d=60$ , слѣдовательно, ошибка равна  $1''$ , около  $22^\circ$   $d=30$  и ошибка равна  $2''$ ; эти ошибки можно сопоставить въ такой табличкѣ:

|                      |              |                      |               |
|----------------------|--------------|----------------------|---------------|
| $12^\circ$ . . . . . | ошибка $1''$ | $55^\circ$ . . . . . | ошибка $7''$  |
| $22^\circ$ . . . . . | » $2''$      | $60^\circ$ . . . . . | » $8''$       |
| $30^\circ$ . . . . . | » $3''$      | $70^\circ$ . . . . . | » $12''$      |
| $40^\circ$ . . . . . | » $4''$      | $80^\circ$ . . . . . | » $30''$      |
| $45^\circ$ . . . . . | » $5''$      | $85^\circ$ . . . . . | » $60'' = 1'$ |
| $50^\circ$ . . . . . | » $6''$      | $88^\circ$ . . . . . | » $3'$        |

При  $88^\circ$  одинъ и тотъ же синусъ соотвѣтствуетъ тремъ различнымъ угламъ, слѣдовательно, ошибка больше даже трехъ минутъ.

Для косинусовъ мы получимъ тѣ же результаты, только расположенные въ обратномъ порядкѣ. Такимъ образомъ мы можемъ сдѣлать первый выводъ: *малые углы плохо опредѣляются по косинусамъ, а большіе — по синусамъ.* !

2. Называя черезъ  $d_1$  табличную разность логариемовъ тангенсовъ (и котангенсовъ) и обращаясь къ таблицамъ, мы видимъ, что  $d_1$  увеличивается при возрастаніи угла отъ  $0^\circ$  до  $45^\circ$  и уменьшается при

дальнѣйшемъ возрастаніи угла. Около  $45^\circ$   $d_1 = 25$  и ошибка равна  $2'',4$ . Слѣдовательно, по тангенсамъ и котангенсамъ углы опредѣляются тѣмъ лучше, чѣмъ они дальше отстоятъ отъ  $45^\circ$ .

3. Результаты изслѣдованій относительно тангенсовъ можно сопоставить въ слѣдующей таблицѣ:

|            |                |                    |              |
|------------|----------------|--------------------|--------------|
| $12^\circ$ | . ошибка $1''$ | $60^\circ$ . . . . | ошибка $2''$ |
| $28^\circ$ | » $2''$        | $77^\circ$ . . . . | » $1''$      |
| $45^\circ$ | » $2'',4$      | $84^\circ$ . . . . | » $0'',5$ .  |

Сравнивая данныя обѣихъ табличекъ, мы приходимъ къ третьему выводу: углы точнѣе опредѣляются по тангенсамъ и котангенсамъ, чѣмъ по синусамъ и косинусамъ.

83. Въ заключеніе скажу нѣсколько словъ о томъ, какими таблицами (пятизначными или семизначными) лучше пользоваться въ школьной практикѣ и въ жизни. Предыдущія изслѣдованія доказали несомнѣнное преимущество, въ смыслѣ бѣльшей точности, семизначныхъ таблицъ; но пользованіе ими сопряжено съ лишними затрудненіями и еще болѣе продолжительными ариѳметическими выкладками. Кромѣ того, громадное число математическихъ вычисленій обыкновенно довольствуется величинами, измѣренными съ точностью до 3 или 4 десятичныхъ знаковъ, и углами—съ точностью до полу-минуты. Тоже самое мы видимъ и въ Астрономіи. Знаменитый Ляляндъ въ предисловіи къ своимъ пятизначнымъ таблицамъ упоминаетъ, что при ихъ помощи онъ вычислилъ множество затменій и планетныхъ орбитъ; въ защиту пятизначныхъ таблицъ выступилъ также въ 1852 г. и

Леверрье, благодаря авторитету коего пятизначныя таблицы были введены въ школьную практику (во Франціи).

Казалось бы, этимъ вопросъ исчерпывается; однако слѣдуетъ помнить, что во многихъ вопросахъ математики и смежныхъ съ нею областей точность пятизначныхъ таблицъ является уже недостаточной. Такъ, въ геодезій, при триангуляціонныхъ вычисленіяхъ, точность базисныхъ измѣреній доведена до миллионныхъ частей метра (т. е. результаты получаются съ 7-ю десятичными знаками), а углы, при помощи инструментовъ и приспособленій, съ точностью до  $0''$ , 1. Въ Астрономіи, при орудованіи съ междупланетными разстояніями, точность эта еще возрастаетъ, равно какъ и въ Физикѣ, при опредѣленіи коэффиціентовъ расширения и т. п. Здѣсь приходится пользоваться 10-тизначными таблицами Vega или даже 48-значными Вольфрама! Далѣе, въ финансовыхъ вычисленіяхъ почти всегда встрѣчаются данныя съ 7-ю и даже 10-ю десятичными знаками. Уже эти факты должны убѣдить насъ въ необходимости употребленія семизначныхъ таблицъ въ жизни; для школьной же практики вполнѣ достаточны пятизначныя.

**Примѣчаніе.** Изложенные здѣсь способы вычисленій круговыхъ функцій примѣнялись первыми составителями таблицъ; въ настоящее время существуетъ болѣе однообразный способъ, основанный на теоріи рядовъ и на замѣчательныхъ разложеніяхъ  $\sin x$  и  $\cos x$ , данныхъ впервые Ньютономъ.

---

## Глава V. Разложеніе гоніометрическихъ многочленовъ на множители.

84. Гоніометрическимъ называется всякій многочленъ, въ которомъ хотя одинъ членъ содержитъ круговую функцію. Для вычисленія такого многочлена необходимо, въ большинствѣ случаевъ, прибѣгнуть къ логариѣмамъ; съ этой цѣлью стараются многочленъ представитъ въ видѣ произведенія, составленнаго изъ сомножителей, логариѣмируемыхъ въ отдѣльности. Но и кромѣ вычисленія многочленовъ разложеніемъ на множители пользуются для нахожденія истиннаго значенія неопредѣленныхъ выраженій, для рѣшенія многихъ гоніометрическихъ уравненій и т. п.

85. Подобно тому какъ и въ Алгебрѣ, не существуетъ неизмѣннаго правила для разложенія многочлена на множители; однако можно указать два главныхъ пріема, при помощи коихъ задача почти всегда рѣшается удовлетворительно. Я имѣю въ виду методу преобразованій и методу введенія вспомогательнаго угла. Первая изъ нихъ вполнѣ точна, но область примѣненія ея ограничена; вторая сложнѣе и допускаетъ погрѣшности въ результатахъ, но болѣе общаго характера; къ ней прибѣгаютъ въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ первая метода непримѣнима.

### А. Метода преобразованій.

86. Какъ показываетъ само названіе, метода основана на преобразованіи, при помощи главныхъ формулъ гоніометріи, даннаго многочлена въ одночленъ. Нѣсколько примѣровъ покажутъ намъ, какъ примѣнять эти формулы.

**Примѣръ 1.** Разложить на множители двучленъ  $1 + \cos x$ .

Мы имѣли раньше формулу  $\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ ; возвышая обѣ части послѣдняго равенства въ квадратъ, находимъ:  $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$ , откуда:  $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ .

**Примѣръ 2.** Разложить на множители двучленъ  $\cos^4 \frac{A}{2} - \sin^4 \frac{A}{2}$ .

Замѣчая, что данный двучленъ представляет разность квадратовъ, находимъ:

$$\cos^4 \frac{A}{2} - \sin^4 \frac{A}{2} = \left( \cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2} \right) \cdot \left( \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} \right).$$

Но первый множитель равенъ 1, а второй есть не что иное, какъ  $\cos A$ , слѣдовательно:

$$\cos^4 \frac{A}{2} - \sin^4 \frac{A}{2} = \cos A.$$

**87. Формулы суммы и разности круговыхъ функцій.** Кромѣ извѣстныхъ намъ уже формулъ, весьма полезны при разложеніи на множители еще и слѣдующія, выводя коихъ очень просто.

Мы имѣли раньше:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Складывая и вычитая эти равенства почленно, получимъ:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta,$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta.$$

Пусть:  $\alpha + \beta = p$ ,  $\alpha - \beta = q$ , тогда  $\alpha = \frac{p+q}{2}$ ,  
 $\beta = \frac{p-q}{2}$  и мы имѣемъ:

$$I) \quad \begin{cases} \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \\ \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}. \end{cases}$$

Эти формулы читаются такъ:

1°. Сумма синусовъ двухъ угловъ равна удвоенному произведенію синуса полусуммы этихъ угловъ на косинусъ ихъ полуразности.

2°. Разность синусовъ двухъ угловъ равна удвоенному произведенію косинуса полусуммы этихъ угловъ на синусъ ихъ полуразности.

Точно также изъ формулъ:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

путемъ тѣхъ же преобразованій получимъ (замѣчая, что  $-\sin \frac{p-q}{2} = \sin \frac{q-p}{2}$ ):

$$II) \quad \begin{cases} \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \\ \cos p - \cos q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{q-p}{2}, \end{cases}$$

т. е.:

3°. Сумма косинусовъ двухъ угловъ равна удвоенному произведенію косинуса полусуммы этихъ угловъ на косинусъ ихъ полуразности.

4°. Разность косинусовъ двухъ угловъ равна удвоенному произведенію синуса полусуммы этихъ угловъ на синусъ ихъ обратной полуразности.

Далѣе:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} p \pm \operatorname{tg} q &= \frac{\sin p}{\cos p} \pm \frac{\sin q}{\cos q} = \frac{\sin p \cos q \pm \sin q \cos p}{\cos p \cos q} = \\ &= \frac{\sin(p \pm q)}{\cos p \cos q}, \text{ откуда получаемъ двѣ новыхъ формулы:} \end{aligned}$$

$$\text{III)} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cos q}, \\ \operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p \cos q}, \end{cases}$$

т. е.:

5°. Сумма тангенсовъ двухъ угловъ равна синусу суммы этихъ угловъ, дѣленному на произведение косинусовъ тѣхъ же угловъ.

6°. Разность тангенсовъ двухъ угловъ равна синусу разности этихъ угловъ, дѣленному на произведение косинусовъ тѣхъ же угловъ.

И наконецъ:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} p \pm \operatorname{ctg} q &= \frac{\cos p}{\sin p} \pm \frac{\cos q}{\sin q} = \frac{\cos p \sin q \pm \cos q \sin p}{\sin p \sin q} = \\ &= \frac{\sin(q \pm p)}{\sin p \sin q}, \end{aligned}$$

$$\text{IV)} \quad \begin{cases} \operatorname{ctg} p + \operatorname{ctg} q = \frac{\sin(q+p)}{\sin p \sin q}, \\ \operatorname{ctg} p - \operatorname{ctg} q = \frac{\sin(q-p)}{\sin p \sin q}, \end{cases}$$

т. е.:

7°. Сумма котангенсовъ двухъ угловъ равна синусу суммы этихъ угловъ, дѣленному на произведение синусовъ тѣхъ же угловъ.

8°. Разность котангенсовъ двухъ угловъ равна синусу обратной разности этихъ угловъ, дѣленному на произведение синусовъ тѣхъ же угловъ.

Группы I и II можно представить и такъ

$$V) \quad \begin{cases} 2 \sin a \cos b = \sin (a + b) + \sin (a - b) \\ 2 \sin b \cos a = \sin (a + b) - \sin (a - b) \\ 2 \cos a \cos b = \cos (a + b) + \cos (a - b) \\ 2 \sin a \sin b = \cos (a - b) - \cos (a + b) \end{cases}$$

Въ такомъ видѣ эти формулы полезны при многихъ преобразованіяхъ, и слѣдуетъ обратить на нихъ особое вниманіе.

88. Перейдемъ теперь къ дальнѣйшимъ примѣрамъ.

**Примѣръ 3.** Разложить на множители двучленъ  $\sin 60^\circ - \sin 30^\circ$ .

По формулѣ (I, 2°) находимъ:

$$\begin{aligned} \sin 60^\circ - \sin 30^\circ &= 2 \cos \frac{60^\circ + 30^\circ}{2} \sin \frac{60^\circ - 30^\circ}{2} = \\ &= 2 \cos 45^\circ \sin 15^\circ = \sqrt{2} \sin 15^\circ. \end{aligned}$$

**Примѣръ 4.** Разложить на множители сумму:  $\sin a + \cos b$ .

Такъ какъ  $\cos b = \sin (90^\circ - b)$ , то  $\sin a + \cos b = \sin a + \sin (90^\circ - b)$ . Далѣе, согласно (I, 1°) имѣемъ:

$$\begin{aligned} \sin a + \sin (90^\circ - b) &= 2 \sin \frac{a + 90^\circ - b}{2} \cos \frac{a - 90^\circ + b}{2} = \\ &= 2 \sin \left( 45^\circ + \frac{a - b}{2} \right) \cos \left( 45^\circ - \frac{a + b}{2} \right). \end{aligned}$$

**Примѣръ 5.** Упростить многочленъ:

$$\sin 47^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ + \sin 61^\circ.$$

Разбиваемъ данный многочленъ на двѣ группы такъ:

$$\sin 61^\circ + \sin 47^\circ - \sin 25^\circ - \sin 11^\circ = (\sin 61^\circ + \sin 47^\circ) - (\sin 25^\circ + \sin 11^\circ).$$

Теперь, согласно (I, 1°), имѣемъ:

$$\begin{aligned} 2 \sin 54^\circ \cos 7^\circ - 2 \sin 18^\circ \cos 7^\circ &= \\ &= 2 \cos 7^\circ (\sin 54^\circ - \sin 18^\circ). \end{aligned}$$

Далѣе  $\sin 54^\circ - \sin 18^\circ = 2 \cos 36^\circ \sin 18^\circ$ , поэтому нашъ многочленъ принимаетъ видъ

$$4 \cos 7^\circ \cos 36^\circ \sin 18^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{Но } \sin 18^\circ &= \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos 36^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \quad \sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \frac{1}{4} \text{ и} \end{aligned}$$

окончательно:

$$\sin 47^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ + \sin 61^\circ = \cos 7^\circ.$$

**Примѣръ 6.** Разложить на множители:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x.$$

Имѣемъ по способу группировки:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x &= \sin 2x + (\sin 3x + \\ &+ \sin x) = \sin 2x + 2 \sin 2x \cos x = \sin 2x (1 + \\ &+ 2 \cos x) = 2 \sin 2x \left( \frac{1}{2} + \cos x \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Мы знаемъ, что } \cos 60^\circ &= \frac{1}{2}, \quad \text{поэтому: } \frac{1}{2} + \cos x = \\ &= \cos 60^\circ + \cos x = 2 \cos \left( 30^\circ + \frac{x}{2} \right) \cos \left( 30^\circ - \frac{x}{2} \right). \end{aligned}$$

Итакъ:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 4 \sin 2x \cos\left(30^\circ + \frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left[30^\circ - \frac{x}{2}\right].$$

**Замѣчаніе.** Указанный здѣсь приѣмъ замѣны числа функціей весьма полезенъ при нашихъ преобразованіяхъ и имъ широко пользуются. Поэтому всякій разъ, когда надо преобразовать выраженіе вида:  $M + f(x)$ , гдѣ  $M$  — нѣкоторое число, а  $f(x)$  — одна изъ круговыхъ функцій, то прежде всего необходимо посмотрѣть, возможна ли подстановка  $M = f(y)$ , гдѣ  $f(y)$  обозначаетъ ту же функцію, что и  $f(x)$ . Тогда наше выраженіе приметъ видъ:  $f(y) + f(x)$ , и мы можемъ воспользоваться формулами I — IV. Вотъ нѣсколько подобныхъ примѣровъ.

**Примѣръ 7.** Разложить на множители  $\tan x - \sec x$ . Имѣемъ:

$$\begin{aligned} \tan x - \sec x &= \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x - 1}{\cos x} = \\ &= \sec x (\sin x - 1); \end{aligned}$$

замѣчая, что  $1 = \sin 90^\circ$ , находимъ:

$$\begin{aligned} \sin x - 1 &= \sin x - \sin 90^\circ = \\ &= 2 \cos\left(\frac{x}{2} + 45^\circ\right) \sin\left(\frac{x}{2} - 45^\circ\right). \end{aligned}$$

Далѣе:

$$\sin\left(\frac{x}{2} - 45^\circ\right) = -\sin\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right),$$

но такъ какъ углы  $\left(45^\circ + \frac{x}{2}\right)$  и  $\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right)$  дополняютъ другъ друга до  $90^\circ$ , то  $\sin\left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) = \cos\left(45^\circ + \frac{x}{2}\right)$

и окончательно:

$$\operatorname{tang} x - \sec x = -2 \sec x \cos^2\left(45^\circ + \frac{x}{2}\right).$$

**Примѣръ 8.** Разложить на множители  $\frac{1}{2} - \sin^2 x$ .

1°. Такъ какъ въ данномъ случаѣ  $M$  есть правильная дробь, то можно положить:  $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}$ , откуда:  $\sin \varphi = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (ограничиваясь угломъ I-го квадранта), слѣдовательно,  $\varphi = 45^\circ$ .

Далѣе имѣемъ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \sin^2 x &= \sin^2 45^\circ - \sin^2 x = (\sin 45^\circ + \sin x) \cdot (\sin 45^\circ - \sin x) \\ &= 2 \sin \frac{45^\circ + x}{2} \cos \frac{45^\circ - x}{2} \cdot 2 \cos \frac{45^\circ + x}{2} \sin \frac{45^\circ - x}{2}. \end{aligned}$$

Послѣднее выраженіе можно легко упростить, группируя множителей такъ:

$$\left(2 \sin \frac{45^\circ + x}{2} \cos \frac{45^\circ + x}{2}\right) \cdot \left(2 \sin \frac{45^\circ - x}{2} \cos \frac{45^\circ - x}{2}\right);$$

выраженіе, стоящее въ первыхъ скобкахъ, есть  $\sin(45^\circ + x)$ , а во вторыхъ —  $\sin(45^\circ - x)$ . Такимъ образомъ:

$$\frac{1}{2} - \sin^2 x = \sin(45^\circ + x) \sin(45^\circ - x).$$

Замѣняя, наконецъ,  $\sin(45^\circ - x)$  черезъ

$\cos(45^\circ + x)$  и замѣчая, что  $\sin(45^\circ + x) \cdot \cos(45^\circ + x) = \frac{1}{2} \sin(90^\circ + 2x)$ , а  $\sin(90^\circ + 2x) = \cos 2x$ , окончательно находимъ:

$$\frac{1}{2} - \sin^2 x = \frac{1}{2} \cos 2x.$$

2°. Тотъ же результатъ можно получить гораздо проще, а именно

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x = \\ &= \frac{1}{2} \cos 2x. \end{aligned}$$

Здѣсь кстати замѣчу, что общіе приемы имѣютъ крупное достоинство: зная ихъ, можно рѣшить любую задачу; но на ряду съ этимъ встрѣчаются нерѣдко случаи, когда данный вопросъ рѣшается гораздо проще и легче не по общимъ приемамъ. Указать же заранее путь для рѣшенія вопроса въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, конечно, нельзя: это—дѣло личнаго навыка и способностей.

**Примѣръ 9.** Разложить на множители:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C,$$

при условіи:

$$A + B + C = 180^\circ.$$

Имѣемъ:

$$\sin 2A + \sin 2B = 2 \sin(A + B) \cos(A - B);$$

$$\sin(A + B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C;$$

$$\sin 2C = 2 \sin C \cos C = 2 \sin C \cos[180^\circ - (A + B)];$$

$$\sin 2C = -2 \sin C \cos(A + B);$$

поэтому:

$$\begin{aligned} (\sin 2A + \sin 2B) + \sin 2C &= 2 \sin C \cos (A - B) - \\ &- 2 \sin C \cos (A + B) = 2 \sin C [\cos (A - B) - \\ &- \cos (A + B)] = 2 \sin C \cdot 2 \sin A \sin B. \end{aligned}$$

Итакъ:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C.$$

**Примѣръ 10.** Разложить на множители:

$$\cos^2 A + \cos^2 B - \sin^2 C,$$

при условіи:  $A + B + C = 180^\circ$ .

Имѣемъ:

$$\begin{aligned} \cos^2 B - \sin^2 C &= (\cos B + \sin C) \cdot (\cos B - \sin C); \\ \cos B + \sin C &= \cos B + \cos(90^\circ - C) = \\ &= 2 \cos \frac{90^\circ + (B - C)}{2} \cos \frac{90^\circ - (B + C)}{2}; \\ \cos B - \sin C &= \cos B - \cos(90^\circ - C) = \\ &= 2 \sin \frac{90^\circ + (B - C)}{2} \sin \frac{90^\circ - (B + C)}{2}. \end{aligned}$$

Далѣе (см. примѣръ 8):

$$\begin{aligned} \cos^2 B - \sin^2 C &= \sin[90^\circ + (B - C)] \sin[90^\circ - (B + C)] = \\ &= \cos(B + C) \cos(B - C) = -\cos A \cos(B - C); \\ \cos^2 A + \cos^2 B - \sin^2 C &= \cos^2 A - \cos A \cos(B - C) = \\ &= \cos A [\cos A - \cos(B - C)] = \\ &= \cos A \left( 2 \sin \frac{(A + B) - C}{2} \sin \frac{B - (A + C)}{2} \right); \end{aligned}$$

НО ТАКЪ КАКЪ:

$$\frac{(A+B)-C}{2} = \frac{180^\circ - 2C}{2} = 90^\circ - C; \quad \frac{B-(A+C)}{2} =$$

$$\frac{B-(180^\circ - B)}{2} = B - 90^\circ;$$

ЗАТѢМЪ:

$$\sin \frac{(A+B)-C}{2} = \sin (90^\circ - C) = \cos C;$$

$$\sin \frac{B-(A+C)}{2} = \sin (B - 90^\circ) = -\cos B,$$

ТО ОКОНЧАТЕЛЬНО:

$$\cos^2 A + \cos^2 B - \sin^2 C = -2 \cos A \cos B \cos C.$$

РѢШИМЪ ТЕПЕРЬ НѢСКОЛЬКО ЗАДАЧЪ, ПРИВОДЯЩИХЪ КЪ РАЗЛОЖЕНІЮ НА МНОЖИТЕЛИ.

**Примѣръ 11.** Найти сумму синусовъ и косинусовъ угловъ, составляющихъ арифметическую прогрессию.

1°. Пусть

$$S_1 = \sin x + \sin (x+h) + \sin (x+2h) + \dots +$$

$$+ \sin [x+(n-1)h].$$

Помножимъ обѣ части равенства на  $2 \sin h$

$$2 S_1 \sin h = 2 \sin x \sin h + 2 \sin (x+h) \sin h + \dots +$$

$$+ 2 \sin [x+(n-1)h] \sin h,$$

и воспользуемся 4-й формулой V-й группы. Тогда

$$2 S_1 \sin h = \cos (x-h) - \cos (x+h) +$$

$$+ \cos x - \cos (x+2h) +$$

$$+ \cos (x+h) - \cos (x+3h) +$$

$$+ \cos (x+2h) - \cos (x+4h) +$$

$$+ \dots + \cos [x+(n-2)h] - \cos (x+nh),$$

что послѣ сокращенія даетъ

$$2S_1 \sin h = \{ \cos(x-h) + \cos x \} - \{ \cos[x+(n-1)h] + \cos(x+nh) \}.$$

Замѣняя суммы косинусовъ произведеніями, получимъ

$$\begin{aligned} 2S_1 \sin h &= 2 \cos\left(x - \frac{h}{2}\right) \cos \frac{h}{2} - 2 \cos\left(x + \frac{2n-1}{2}h\right) \cos \frac{h}{2}, \\ S_1 \sin h &= \cos \frac{h}{2} \left[ \cos\left(x - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{2n-1}{2}h\right) \right], \\ S_1 \sin h &= 2 \cos \frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{(n-1)}{2}h\right) \sin \frac{nh}{2} \end{aligned}$$

Переносъ  $\sin h$  вправо и замѣняя его произведеніемъ  $2 \sin \frac{h}{2} \cos \frac{h}{2}$ , окончательно получимъ

$$(\alpha) \quad S_1 = \frac{\sin\left(x + \frac{n-1}{2}h\right) \sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}.$$

2°. Возьмемъ теперь

$$S_2 = \cos x + \cos(x+h) + \cos(x+2h) + \dots + \cos[x+(n-1)h].$$

Замѣнимъ  $x$  на  $\frac{\pi}{2} - x_1$  и  $h$  на  $-h_1$ ; тогда  $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) = \sin x_1$ ,  $\cos(x+h) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x_1 + h_1)\right] = \sin(x_1 + h_1)$  и т. д., т. е. мы получимъ рядъ синусовъ. Поэтому достаточно въ предыдущей формулѣ положить  $x = \frac{\pi}{2} - x$  и  $h = -h$  и тогда мы найдемъ выраженіе для суммы косинусовъ:

$$(\beta) \quad S_2 = \frac{\cos\left(x + \frac{n-1}{2}h\right) \sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}.$$

**Примѣръ 12.** Найти сумму квадратовъ синусовъ и косинусовъ угловъ, составляющихъ арифметическую прогрессию.

Пусть

$$S_3 = \sin^2 x + \sin^2 (x + h) + \dots + \sin^2 [x + (n-1)h],$$

$$S_4 = \cos^2 x + \cos^2 (x + h) + \dots + \cos^2 [x + (n-1)h].$$

Пользуясь формулами

$$\sin^2 a = \frac{1}{2} (1 - \cos 2a),$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2} (1 + \cos 2a),$$

сейчасъ же находимъ

$$S_3 = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} [\cos 2x + \cos 2(x+h) + \dots],$$

$$S_4 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} [\cos 2x + \cos 2(x+h) + \dots],$$

откуда, на основаніи (β), окончательно получимъ

$$(\gamma) \quad S_3 = \frac{n}{2} - \frac{\cos [2x + (n-1)h] \sin nh}{2 \sin h},$$

$$(\varepsilon) \quad S_4 = \frac{n}{2} + \frac{\cos [2x + (n-1)h] \sin nh}{2 \sin h}.$$

**Примѣръ 13.** Найти истинное значеніе выраженія

$$y = \left[ \frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{tg}^2 x} \right]_{x=\pi}$$

При  $x = \pi$  дробь принимаетъ видъ  $\frac{0}{0}$ ; это показываетъ, что числитель и знаменатель дроби содержать общаго множителя, обращающагося въ нуль

при данномъ значеніи  $x$ . Для нахождения истиннаго значенія  $y$  необходимо разложить на множителей числителя и знаменателя, а затѣмъ сократить дробь. Имѣемъ

$$\frac{1 - \cos 2x}{\operatorname{tg}^2 x} = 2 \sin^2 x : \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 2 \cos^2 x;$$

при  $x = \pi$  находимъ  $\cos \pi = -1$ ,  $2 \cos^2 \pi = +2$  и окончательно

$$y = 2.$$

**Примѣръ 14.** Найти истинное значеніе выраженія

$$y = \left[ \frac{\sin mx}{\sin nx} \right]_{x=0}.$$

Такъ какъ при  $x = 0$  находимъ  $y = \frac{0}{0}$ , то это выраженіе неопредѣленное. Разложить числителя и знаменателя мы не можемъ (хотя формула для такого разложенія существуетъ, но выводъ ея — за предѣлами настоящаго курса). Поэтому воспользуемся теоремой II-й главы IV-ой и преобразуемъ данное выраженіе такъ

$$\frac{\sin mx}{\sin nx} = \left( \frac{\sin mx}{mx} : \frac{\sin nx}{nx} \right) \frac{mx}{nx} = \frac{\frac{\sin mx}{mx}}{\frac{\sin nx}{nx}} \cdot \frac{m}{n}.$$

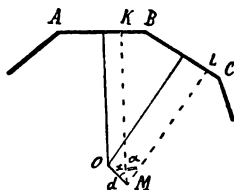
Теперь числитель и знаменатель первой дроби при  $x = 0$  обращаются (каждый въ отдѣльности) въ 1, вторая дробь остается безъ измѣненія и

$$y = \frac{m}{n}.$$

**Примѣръ 15.**  $A, B, C, \dots$  вершины правильнаго многоугольника съ числомъ сторонъ  $n$  (чер. 21). На-

зовемъ его апоѳему черезъ  $k$ , а уголь между двумя сосѣдними апоѳемами черезъ  $\alpha$ ; тогда всѣ  $\alpha$  равны между собою и равны центральному, т. е.  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ .

Возьмемъ теперь произвольную точку  $M$  внутри многоугольника и опустимъ изъ нея перпендикуляры  $MK$ ,  $ML, \dots$  на его стороны; углы между этими перпендикулярами тоже равны  $\alpha$ . Если  $OM = d$  и уголь  $OMK = x$ , то



Черт. 21.

$$MK = k + d \cos x, \quad ML = k + d \cos (x + \alpha), \dots$$

Суммируя и называя сумму перпендикуляровъ черезъ  $S$ , получимъ

$$S = nk + nd [\cos x + \cos (x + \alpha) + \cos (x + 2\alpha) + \dots].$$

Такъ какъ въ выраженіе для суммы косинусовъ входитъ множитель  $\sin \frac{n\alpha}{2} = \sin \pi = 0$ , то второе слагаемое въ выраженіи для  $S$  равно нулю и мы находимъ

$$S = nk,$$

т. е. мы пришли къ теоремѣ Viviani (Viviani, 1622—1703):

**Сумма перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ внутренней точки правильного многоугольника на его стороны, равна апоѳемѣ, умноженной на число сторонъ.**

Если взять алгебраическую сумму перпендикуляровъ, то теорема вѣрна для всякой точки, лежащей въ плоскости многоугольника.

### В. Метода введенія вспомогательнаго угла.

89. Въ предыдущихъ примѣрахъ приходилось почти исключительно преобразовывать такія выраженія, въ которыя круговыя функціи входили въ простѣйшемъ видѣ, т. е. безъ радикаловъ, степеней и даже коэффициентовъ. При заданіяхъ болѣе сложныхъ метода преобразованій не даетъ желательныхъ результатовъ, и приходится обратиться къ другой, допускающей извѣстную неточность и продолжительныя выкладки. Сущность новой методы состоитъ въ слѣдующемъ.

Возьмемъ двучленъ  $a + b$ , гдѣ  $a$  и  $b$  суть какія угодно сложныя выраженія, причемъ по крайней мѣрѣ одно изъ нихъ содержитъ круговыя функціи. Вынося  $a$  за скобки, имѣемъ:

$$a + b = a \left( 1 + \frac{b}{a} \right).$$

Такъ какъ тангенсъ принимаетъ любыя значенія отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ , то можно положить:  $\frac{b}{a} = \tan \varphi$ , гдѣ  $\varphi$  есть нѣкоторый уголъ, опредѣляемый этимъ равенствомъ; онъ и называется вспомогательнымъ угломъ нашего вычисленія. Поэтому:

$$a + b = a \left( 1 + \frac{b}{a} \right) = a (1 + \tan \varphi);$$

замѣчая, что  $1 = \tan 45^\circ$ , имѣемъ:

$$1 + \tan \varphi = \tan 45^\circ + \tan \varphi = \frac{\sin (45^\circ + \varphi)}{\cos 45^\circ \cos \varphi}$$

и окончательно:

$$\text{VI)} \quad a + b = a \sqrt{2} \sec \varphi \sin (45^\circ + \varphi)$$

90. Указанная метода примѣнима и къ многочлену.

Пусть:

$$a + b + c + d + \dots + m \dots (*)$$

представляет данный многочленъ, содержащій въ себѣ  $n$  членовъ. Согласно предыдущему мы замѣняемъ сумму  $a + b$  выраженіемъ:

$$a \sqrt{2} \sec \varphi_1 \cdot \sin (45^\circ + \varphi_1),$$

гдѣ  $\varphi_1$  есть первый вспомогательный уголъ, опредѣляемый равенствомъ:  $\tan \varphi_1 = \frac{b}{a}$ . Тогда нашъ многочленъ приметъ такой видъ:

$$a \sqrt{2} \cdot \sec \varphi_1 \cdot \sin (45^\circ + \varphi_1) + c + d + \dots + m \dots (**).$$

Подобнымъ же образомъ преобразуемъ сумму  $a \sqrt{2} \sec \varphi_1 \sin (45^\circ + \varphi_1) + c$ , полагая

$$\frac{c}{a \sqrt{2} \sec \varphi_1 \sin (45^\circ + \varphi_1)} = \tan \varphi_2;$$

тогда получимъ новый многочленъ:

$$a (\sqrt{2})^2 \sec \varphi_1 \cdot \sec \varphi_2 \cdot \sin (45^\circ + \varphi_1) \cdot \sin (45^\circ + \varphi_2) + d + \dots + m \dots (***).$$

Очевидно, что всѣхъ вспомогательныхъ угловъ будетъ  $n - 1$  и окончательный результатъ преобразований выразится такъ:

$$a + b + c + d + \dots + m = a (\sqrt{2})^{n-1} \sec \varphi_1 \sec \varphi_2 \dots$$

$$\text{VII) } \dots \sec \varphi_{n-1} \sin (45^\circ + \varphi_1) \dots \sin (45^\circ + \varphi_{n-1}).$$

91. На практикѣ примѣненіе изложенной методы въ большомъ масштабѣ, несмотря на ея изящность, почти не встрѣчается въ виду двухъ большихъ неудобствъ. Во первыхъ, чѣмъ больше число вспомогательныхъ угловъ, тѣмъ значительнѣе общая погрѣшность, такъ какъ каждый изъ угловъ  $\varphi$  вычисляется съ извѣстной ошибкой (для тангенсовъ — отъ 0'', 5 до 2''); во вторыхъ, чѣмъ больше членовъ въ многочленѣ, тѣмъ сложнѣе становятся вычисления отдѣльныхъ угловъ  $\varphi$ . Все это, взятое вмѣстѣ, составляетъ часто избѣгать примѣненія этой методы на практикѣ, кромѣ нѣсколькихъ простыхъ случаевъ, которыми мы и займемся. Напомню кстати, что, сохраняя общую идею преобразованій, я буду разнообразить частности всякій разъ, какъ это позволятъ условія заданія.

**Примѣръ 1.** Разложить на множители  $3 - 2 \sin 20^\circ$ .

Имѣемъ:

$$3 - 2 \sin 20^\circ = 3 \left( 1 - \frac{2}{3} \sin 20^\circ \right) = 3 (1 - \operatorname{tg} \varphi),$$

гдѣ

$$(*) \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{3} \sin 20^\circ.$$

Далѣе:  $1 - \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2} \sec \varphi \sin (45^\circ - \varphi)$ ; остается вычислить уголъ  $\varphi$ .

Логарифмируя обѣ части равенства (\*), находимъ:

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \log 2 + \log \sin 20^\circ - \log 3;$$

$$\log \operatorname{tg} \varphi = 9,35796 - 10;$$

$$\varphi = 12^\circ 50' 40'', 3;$$

Итакъ:

$$3 - 2 \sin 20^\circ = 3 \sqrt{2} \sec 12^\circ 50' 40'', 3 \sin 32^\circ 9' 19'', 7.$$

**Примѣръ 2.** Преобразовать выраженіе  $\sqrt{a^2 + b^2}$ .

Имѣемъ:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

гдѣ  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ . Такъ какъ  $1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \sec^2 \varphi$ , то окончательно:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a \sec \varphi.$$

**Примѣръ 3.** Разложить на множители выраженіе:

$$m \sin x \pm n \cos x.$$

Раздѣлимъ оба члена на  $m$  и положимъ:

$$\frac{n}{m} = \operatorname{tg} \varphi,$$

тогда:

$$m \sin x \pm n \cos x = m \left( \sin x \pm \frac{n}{m} \cos x \right) = m (\sin x \pm \pm \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos x).$$

Далѣе имѣемъ:

$$\begin{aligned} \sin x \pm \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos x &= \frac{1}{\cos \varphi} (\sin x \cos \varphi \pm \sin \varphi \cos x) = \\ &= \frac{1}{\cos \varphi} \sin (x \pm \varphi), \end{aligned}$$

слѣдовательно:

$$m \sin x \pm n \cos x = m \sec \varphi \cdot \sin (x \pm \varphi).$$

**Примѣръ 4.** Преобразовать выраженіе  $a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ .

Данное выраженіе представляет собою правую часть извѣстной формулы для квадрата стороны тре-

угольника. Искомое преобразование можно выполнить нѣсколькими способами.

1°. Прибавляя и вычитая  $2ab$ , получимъ:

$$a^2 + b^2 + 2ab - 2ab - 2ab \cos C = (a + b)^2 - 2ab(1 + \cos C),$$

но  $1 + \cos C = 2 \cos^2 \frac{C}{2}$ , слѣдовательно

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (a + b)^2 - 4ab \cos^2 \frac{C}{2}.$$

Мы привели трехчленъ къ двучлену при помощи первой методы. Введемъ теперь вспомогательный уголъ. Имѣемъ:

$$(a + b)^2 - 4ab \cos^2 \frac{C}{2} = (a + b)^2 \left[ 1 - \frac{4ab}{(a + b)^2} \cos^2 \frac{C}{2} \right].$$

Покажемъ, что  $\frac{4ab}{(a + b)^2}$  есть правильная дробь. Для этого преобразуемъ ее такъ:

$$\frac{4ab}{(a + b)^2} = \frac{(\sqrt{ab})^2}{\left(\frac{a + b}{2}\right)^2};$$

здѣсь  $\sqrt{ab}$  есть среднее геометрическое двухъ чиселъ, а  $\frac{a + b}{2}$  — ихъ среднее арифметическое; изъ алгебры же извѣстно, что первое не больше второго, т.-е. наша дробь правильная или равна 1. Поэтому я могу положить:

$$\frac{2\sqrt{ab}}{a + b} \cos \frac{C}{2} = \sin \varphi,$$

что даетъ окончательно:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (a + b)^2 \cos^2 \varphi.$$

2°. Подставляя вмѣсто  $\cos C$  равную ему величину  $1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2}$ , получимъ:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab \cos C &= (a - b)^2 + 4ab \sin^2 \frac{C}{2} = \\ &= (a - b)^2 \left[ 1 + \frac{4ab}{(a - b)^2} \sin^2 \frac{C}{2} \right] = (a - b)^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi), \end{aligned}$$

гдѣ  $\varphi$  опредѣляется равенствомъ:  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{ab}}{a - b} \sin \frac{C}{2}$ .  
Итакъ

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (a - b)^2 \sec^2 \varphi.$$

3°. Перепишемъ данное выраженіе такъ:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 1 \cdot (a^2 + b^2) - 2ab \cdot \cos C.$$

Замѣчая, что  $\cos C = \cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2}$ , а  $1 = \cos^2 \frac{C}{2} + \sin^2 \frac{C}{2}$ , имѣемъ:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab \cos C &= (a^2 + b^2) \cdot \left( \cos^2 \frac{C}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \right) - \\ &- 2ab \left( \cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} \right). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и упрощая, получимъ:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab \cos C &= (a + b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} + (a - b)^2 \cos^2 \frac{C}{2} = \\ &= (a + b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} \left[ 1 + \left( \frac{a - b}{a + b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Полагая:  $\frac{a - b}{a + b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{tg} \varphi$ , окончательно получимъ:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos C = (a + b)^2 \sin^2 \frac{C}{2} \sec^2 \varphi.$$

**Примѣръ 5.** Разложить на множители выражение  $\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ .

Вынесемъ за скобки  $\sin \alpha$ :

$$\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \sin \alpha (\sin \beta + \cos \beta \operatorname{ctg} \alpha \cos \gamma).$$

Пусть теперь:  $\operatorname{ctg} \alpha \cos \gamma = \operatorname{tg} \varphi$ , тогда:

$$\sin \beta + \cos \beta \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\cos \varphi} (\sin \beta \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi) = \sec \varphi \sin (\beta + \varphi)$$

и окончательно:

$$\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \sin \alpha \sec \varphi \sin (\beta + \varphi).$$

92. Метода введенія вспомогательнаго угла неприимѣнима въ томъ случаѣ, когда въ многочленъ, кромѣ вещественныхъ, входятъ и мнимыя количества.

На практикѣ, для избѣжанія длинныхъ выкладокъ, сопровождающихъ вычисленія по методѣ вспомогательнаго угла, почти всегда пользуются логариѣмами Гаусса, составленными для нахождения логариѣмовъ суммъ и разностей; они находятся во всѣхъ таблицахъ логариѣмовъ.

### Примѣры для упражненій.

Разложить на множители выраженія:

- |                                                                         |                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\cos 47^\circ - \cos 61^\circ + \cos 25^\circ - \cos 11^\circ$ .    | 2. $\sin 88^\circ - 2 \sin 59^\circ - (\sin 92^\circ - \sin 61^\circ)$ . |
| 3. $\sin 47^\circ + \sin 78^\circ + (\cos 47^\circ - \sin 102^\circ)$ . | 4. $\sin a - \cos (a - b)$ .                                             |
| 5. $\operatorname{tg} x + \sin x$ .                                     | 6. $\sec A - 1$ .                                                        |

7.  $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} - \operatorname{tg} A.$
  9.  $\sin A + \cos A - 1.$
  11.  $\frac{\sin A + \cos (2m - A)}{\cos A - \sin (2m - A)}.$
  13.  $\frac{2 \sin A + \sin 2A}{2 \sin A - \sin 2A}.$
  15.  $1 - \operatorname{tg} (45^\circ + A).$
  17.  $3 - 4 \cos^2 A.$
  19.  $\cos 72^\circ - \frac{1}{2} \sqrt{3}.$
  21.  $\sin^2 (A + B) - \sin^2 A - \sin^2 B.$
  23.  $\frac{\cos^2 15^\circ \cdot \operatorname{tg} 15^\circ}{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}.$
  25.  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x.$
  27.  $\cos 5a + 3 \cos 7a + 3 \cos 9a + \cos 11a.$
  29.  $\sqrt{5} - 4 \sin x - 1.$
  31.  $\cos A + \cos B + \cos C - 1.$
  32.  $\cos 2A + \cos 2B + \sin 2C.$
  33.  $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} - \cos \frac{C}{2}.$
  34.  $\sin^2 A + \sin^2 C - \sin^2 B.$
  35.  $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$  (Cagnoli, 1786).
  36.  $\operatorname{tg} 2A + \operatorname{tg} 2B + \operatorname{tg} 2C.$
  37.  $\operatorname{tg} 100A + \operatorname{tg} 100B + \operatorname{tg} 100C.$
  38.  $\operatorname{tg} A - \operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} C.$
  39.  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1.$
  40.  $\sin^2 A + \sin^2 B - 2 \sin A \sin B \cos C.$
8.  $\frac{1 + \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2}}.$
  10.  $\cos A - \sin A + 1.$
  12.  $\frac{1 + 2 \cos A}{1 + 2 \sin A}.$
  14.  $\frac{\sin x}{1 \pm \cos x}.$
  16.  $1 - 2 \sin x \sqrt{1 - \sin^2 x}.$
  18.  $\sqrt{3} \cos a \pm \sin a.$
  20.  $\cos x - \sqrt{3} \sin x.$
  22.  $3 - 4 \sin^2 48^\circ.$
  24.  $\frac{4}{1 - 2 \cos 26^\circ}.$
  26.  $3 \sec^2 3x - 2 \sec^2 2x - \sec^2 x.$
  28.  $\frac{\sin \frac{2}{3} A + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} A \right)}{\cos \frac{2}{3} A + \cos \frac{4}{3} A}.$
  30.  $\frac{(\sec x - 1) \cdot (1 + \cos x)}{\sin (2x - 180^\circ)}$

при умові:  
 $A + B + C = 180^\circ.$

$$41. a \sin x \pm b \sin y.$$

$$43. a \pm \sqrt{a^2 \pm b^2}.$$

$$45. M \cos A + N \cos (90^\circ - A).$$

$$47. \sqrt{\sin^2 12^\circ + \cos^2 40^\circ}.$$

$$49. \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$$

$$42. \sin^2 x + \sin^2 y.$$

$$44. \sqrt{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha} + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}.$$

$$46. \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}.$$

$$48. \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2 - \cos 14^\circ 3'}}{\sqrt{2 + \cos 14^\circ 3'}}}.$$

$$50. \sin A \sin B + \cos A \cos B \cdot \cos C \cos D \cos E.$$

Найти истинное значение слѣдующихъ неопредѣленныхъ выражений:

$$51. y = \left[ \frac{\sec x - 1}{\operatorname{tg}^2 x} \right]_{x=0}.$$

$$53. y = \left[ \frac{x \sin x}{1 - \cos x} \right]_{x=0}.$$

$$55. y = \left[ \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{\alpha - \beta} \right]_{\alpha=\beta}.$$

$$57. y = \left[ \frac{1 + \sec x}{\operatorname{tg}^2 x} \right]_{x=\pi}.$$

$$59. y = \left[ \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} \right]_{x=0}.$$

$$61. y = \left[ \frac{\cos 3x}{\sin (x - 30^\circ)} \right]_{x=30^\circ}.$$

$$63. y = \left[ \frac{\cos 2a}{\cos a - \cos 45^\circ} \right]_{a=45^\circ}.$$

$$65. y = \left[ \frac{\sin (a - 60^\circ)}{4 \cos^2 a - 1} \right]_{a=60^\circ}.$$

$$67. y = \left[ \frac{1 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg}^2 x - 1} \right]_{x=45^\circ}.$$

$$69. y = \left[ \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x + \cos 2x \sin x} \right]_{x=\frac{\pi}{2}}.$$

$$52. y = \left[ \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx} \right]_{x=0}.$$

$$54. y = \left[ \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\alpha - \beta} \right]_{\alpha=\beta}.$$

$$56. y = \left[ \frac{\sin (a+x) - \sin a}{x} \right]_{x=0}.$$

$$58. y = \left[ \frac{1 + \sec 2x}{\cos x} \right]_{x=\frac{\pi}{2}}.$$

$$60. y = \left[ \frac{1 - \operatorname{ctg} \alpha}{\sec^2 \alpha - 2} \right]_{\alpha=45^\circ}.$$

$$62. y = \left[ \frac{1 - \cos x}{1 - \sec \alpha} \right]_{\alpha=0}.$$

$$64. y = \left[ \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos x}{1 + \sin^2 x + \cos x} \right]_{x=\pi}.$$

$$66. y = \left[ \frac{(1 - \sin x)^2}{\cos x} \right]_{x=\frac{\pi}{2}}.$$

$$68. y = \left[ \frac{\sin^2 x \sin 2x - \sin^2 a \sin 2x}{\sin (x - a)} \right]_{x=a=45^\circ}.$$

$$70. y = \left[ \frac{2 \sin^2 x - 1 + \cos \alpha}{\sin (x - \frac{\alpha}{2})} \right]_{\alpha=2x}.$$

## Глава VI. Обратныя круговыя функціи.

### А. Общія свойства.

**93. Опреѣленія.** Двѣ величины  $x$  и  $y$  такія, что каждая изъ нихъ можетъ быть сдѣлана функціей другой, называются *взаимно-обратными величинами*. Эта зависимость между  $x$  и  $y$  выражается равенствами:

$$x = f(y), \quad y = F(x).$$

Функціи  $f(y)$  и  $F(x)$  называются *обратными* или *взаимно-обратными функціями*.

Если радіусъ  $R$  принять за независимую переменную, то длина окружности  $C$  будетъ его функціей; наоборотъ, всякому значенію  $C$  соотвѣтствуетъ вполне опредѣленное значеніе  $R$ ; мы получаемъ, следовательно, двѣ обратимыхъ функціи:

$$C = 2\pi R, \quad R = \frac{C}{2\pi}.$$

Другимъ примѣромъ могутъ служить функціи логарифмическая и показательная; дѣйствительно:

$$y = e^x, \quad x = \lg y.$$

**Примѣчаніе.** Взаимно-обратныя величины не слѣдуетъ смѣшивать съ взаимно-обратными числами, произведеніе коихъ, какъ извѣстно, равно 1. Легко видѣть, что послѣднія составляютъ частный случай первыхъ.

**94.** Въ I-ой главѣ II-ой части было уже упомянуто, что гониометрическія функціи представляютъ замѣчательный примѣръ обратимости. Возьмемъ одну

изъ круговыхъ функцій, напริมѣръ синусъ; эта функція непрерывна, слѣдовательно, всякому значенію *ула* соотвѣтствуетъ значеніе *синуса*; обратно, всякому значенію *синуса* соотвѣтствуетъ по крайней мѣрѣ одно значеніе *ула*, т.-е. можно принять синусъ за независимую переменную, а уголъ—за его функцію. Если мы имѣемъ для нѣкотораго угла  $x$  зависимость:

$$\sin x = a,$$

то это равенство показываетъ, что  $x$  есть уголъ, синусъ котораго  $a$ . Это принято обозначать такъ:

$$1) \quad x = \text{ArcSin } a;$$

Подобнымъ же образомъ находимъ, что и остальные круговыя функціи обратимы, что выражается рядомъ равенствъ:

$$\begin{aligned} x &= \text{ArcCos } a, & x &= \text{ArcTg } a, & x &= \text{ArcCtg } a, \\ x &= \text{ArcSec } a, & x &= \text{ArcCosec } a. \end{aligned}$$

**Функціи:** **арксинусъ, арккосинусъ, арктангенсъ, арккотангенсъ, арксекансъ и арккосекансъ** называются **обратными круговыми функціями**.

**95. Графики обратныхъ круговыхъ функцій.** Ограничимся разсмотрѣніемъ одной изъ функцій, напрімѣръ арккосинуса. Откладывая на оси  $X$ -овъ значенія  $\cos x$ , мы получимъ на оси  $Y$ -овъ соотвѣтствующія значенія угла  $x$  (черт. 22).

Полученная нампъ графика оказывается совершенно тождественной съ графикой косинуса, если только

перемѣнить оси; поэтому мы заключаемъ, что и графики остальныхъ функцій совпадаютъ съ соотвѣстственными графиками круговыхъ функцій.

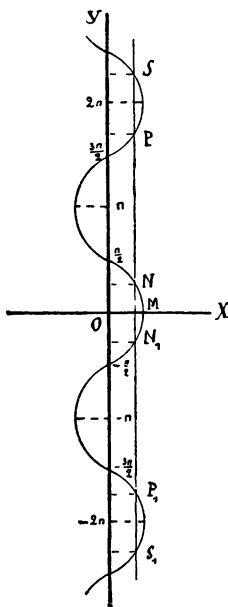
**96. Непрерывность обратныхъ круговыхъ функцій.** Изъ разсмотрѣнія графикъ можно вывести слѣдующія заключенія.

I. Арксинусъ и арккосинусъ непрерывны для всѣхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ «sinus» и «cosinus», заключающихся въ предѣлахъ отъ  $-1$  до  $+1$ .

II. Арктангенсъ и арккотангенсъ непрерывны для всѣхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ «tangens» и «cotangens», заключающихся въ предѣлахъ отъ  $-\infty$  до  $+\infty$ , за исключеніемъ значеній  $-\infty$  и  $+\infty$ .

III. Арксекансъ и арккосекансъ непрерывны для всѣхъ значеній независимыхъ перемѣнныхъ «secans» и «cosecans», заключающихся въ предѣлахъ отъ  $-1$  до  $-\infty$  и отъ  $+1$  до  $+\infty$ , за исключеніемъ значеній  $-\infty$  и  $+\infty$ .

**97 Мнозначность обратныхъ круговыхъ функцій.** Пусть  $x = \text{ArcCos } b$ ; отложимъ  $OM = b$  и проведемъ черезъ  $M$  прямую параллельно оси  $Y$ -овъ. Эта прямая пересѣчетъ графику въ точкахъ  $N, P, S...$ , ординаты коихъ равны  $b$ . Мы получаемъ такимъ образомъ для  $x$  не одно, а безчисленное множество значеній, а именно:



Черт. 22.

$$\begin{aligned}x_1 &= MN = x, & x_m &= MN_1 = -x, \\x_2 &= MP = 2\pi - x, & x_{m+1} &= MP_1 = -(2\pi - x), \\x_3 &= MS = 2\pi + x, & x_{m+2} &= MS_1 = -(2\pi + x),\end{aligned}$$

т. е. данному косинусу соотвѣтствуетъ безчисленное множество угловъ; всѣ они будутъ вида:  $\pm (2\pi - x)$  и  $\pm (2\pi + x)$ .

Полученный результатъ показываетъ, что обратныя круговыя функціи принадлежатъ къ числу *многозначныхъ* функцій, тогда какъ круговыя функціи являются *однозначными*; періодичность круговыхъ перешла въ многозначность обратныхъ.

Если ограничиться одной вѣтвью кривой, напри-  
мѣръ  $CD$ , то она представитъ намъ однозначную функцію арккосинусъ, такъ какъ въ промежуткѣ отъ  $C$  до  $D$  каждому значенію  $y$  соотвѣтствуетъ одно и только одно значеніе  $x$ . Поэтому среди всѣхъ значе-  
ній  $x$  выбираютъ обыкновенно наименьшее или же говорятъ, въ какомъ промежуткѣ оно заключается. Для арксинуса и арктангенса этотъ промежутокъ отъ  $-\frac{\pi}{2}$  до  $+\frac{\pi}{2}$ ; для остальныхъ 4-хъ функцій — отъ 0 до  $\pi$ .

Если имѣютъ въ виду только наименьшія значе-  
нія обратныхъ круговыхъ функцій, то пишутъ обыкновенно слово «арс» съ малой буквы, а не съ большой, какъ было раньше, т. е. пишутъ, напри-  
мѣръ, такъ:

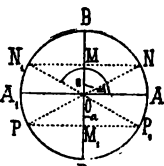
2)  $x = \text{arcSin } a.$

**98. Трансцендентность обратных круговых функций.** Всякое алгебраическое уравнение вида:  $F(x) = 0$  имѣетъ конечное число рѣшеній, въ зависимости отъ степени уравненія. Уравненіе же  $x = \text{ArcSin } a$ , какъ мы сейчасъ видѣли, имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, слѣдовательно, оно не можетъ быть уравненіемъ алгебраическимъ.

Итакъ многозначность обратныхъ круговыхъ функций служитъ главнымъ доказательствомъ ихъ трансцендентности.

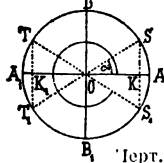
**99. Построеніе обратныхъ круговыхъ функций.** Разсмотримъ построение всѣхъ функций отдѣльно, пользуясь указаніями § 3, гл. II.

**I. Построить  $x = \text{arcSin } a$ .** Имѣемъ  $\sin x = a$ ; откладывая на  $OB$  отръзокъ  $OM = a$  (черт. 23) и проводя черезъ  $M$  прямую параллельно  $AA_1$ , находимъ двѣ точки пересѣченія ея съ окружностью,  $N$  и  $N_1$ ; тогда:  $x_1 = \angle AON$ ,  $x_2 = \angle AON_1 = \pi - x$ . Если  $a$  отрицательное, то  $a = OM_1$ ,  $x_1 = \angle AOP$ ,  $x_2 = \angle AOP_1$ .

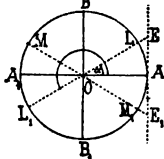


Черт. 23.

**II. Построить  $x = \text{arcCos } b$ .** Имѣемъ  $\cos x = b$ ; откладывая на  $OA$  отръзокъ  $OK = b$  (черт. 24) и проводя черезъ  $K$  прямую параллельно  $BB_1$ , находимъ двѣ точки пересѣченія ея съ окружностью,  $S$  и  $S_1$ ; тогда:  $x_1 = \angle AOS$ ,  $x_2 = \angle AOS_1 = 2\pi - x$ . Если  $b$  отрицательное, то  $b = OK_1$ ,  $x_1 = \angle AOT$ ,  $x_2 = \angle AOT_1$ .



Черт. 24.

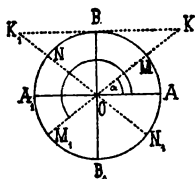


Черт. 25.

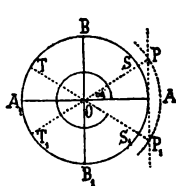
**III. Построить  $x = \text{arcTg } c$ .** Имѣемъ  $\text{tg } x = c$ ; откла-

дывая на первой касательной отрезок  $AE = c$  (черт. 25) и проводя прямую через  $E$  и  $O$ , находимъ двѣ точки пересѣченія ея съ окружностью,  $L$  и  $L_1$ ; тогда:  $x_1 = \angle AOL$ ,  $x_2 = \angle AOL_1 = \pi + x$ . Если  $c$  отрицательное, то  $c = AE_1$ ,  $x_1 = \angle AOM$ ,  $x_2 = \angle AOM_1$ .

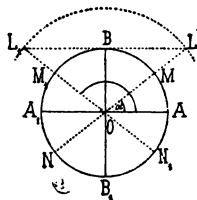
IV. Построить  $x = \text{arcCtg } d$ . Имѣемъ  $\text{ctg } x = d$ ; откладывая на второй касательной отрезокъ  $BK = d$  (черт. 26) и проводя прямую черезъ  $K$  и  $O$ , находимъ двѣ точки пересѣченія ея съ окружностью,  $M$  и  $M_1$ ; тогда:  $x_1 = \angle AOM$ ,  $x_2 = \angle AOM_1 = \pi + x$ . Если  $d$  отрицательное, то  $d = BK_1$ ,  $x_1 = \angle AON$ ,  $x_2 = \angle AON_1$ .



Черт. 26.



Черт. 27.



Черт. 28.

V. Построить  $x = \text{arcSec } e$ . Имѣемъ  $\text{sec } x = e$ ; проводимъ первую касательную и изъ  $O$  радиусомъ, равнымъ  $e$ , описываемъ дугу; тогда точки пересѣченія ея съ касательной будутъ  $P$  и  $P_1$  (черт. 27). Проводя прямая черезъ точки  $P$  и  $O$ , а затѣмъ  $P_1$  и  $O$ , находимъ четыре точки пересѣченія этихъ прямыхъ съ окружностью:  $S$  и  $T_1$ ,  $T$  и  $S_1$ . Если  $e$  положительное, то  $e = OP = OP_1$  и  $x_1 = \angle AOS$ ,  $x_2 = \angle AOS_1 = 2\pi - x$ ; если  $e$  отрицательное, то  $e = -OP = -OP_1$  и  $x_1 = \angle AOT$ ,  $x_2 = \angle AOT_1$ .

VI. Построить  $x = \text{arcCosec } f$ . Имѣемъ  $\text{cosec } x = f$ ; проводимъ вторую касательную и изъ  $O$  радиусомъ,

равнымъ  $f$ , описываемъ дугу; тогда точки пересѣченія съ касательной будутъ  $L$  и  $L_1$  (черт. 28). Далѣе, подобно предыдущему, находимъ: при  $f$  положительномъ —  $x_1 = \angle AOM$ ,  $x_2 = \angle AOM_1 = \pi - x$ ; при  $f$  отрицательномъ —  $x_1 = \angle AON$ ,  $x_2 = \angle AON_1$ .

**100. Общія формулы.** На основаніи предыдущаго легко вывести общія формулы для угловъ, имѣющихъ одинаковый синусъ, косинусъ и т. д., т. е. общія формулы для обратныхъ круговыхъ функцій.

**I. Арксинусъ и арккосекансъ.** Имѣемъ (согласно черт. 23):

$$x = \text{ArcSin } a, \quad x_1 = \alpha, \quad x_2 = \pi - \alpha.$$

Прибавляя къ обоимъ рѣшеніямъ по  $2k\pi$ , мы этимъ не измѣнимъ величины  $\alpha$ ; поэтому:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2k\pi + \alpha, \\ x_2 &= (2k + 1)\pi - \alpha. \end{aligned}$$

Здѣсь  $k$  — произвольное цѣлое число, положительное, отрицательное или нуль. Оба рѣшенія можно представить въ видѣ одной общей формулы; для этого замѣтимъ, что знакъ передъ  $\alpha$  зависитъ отъ четности  $(2k)$  или нечетности  $(2k + 1)$  коэффициента при  $\pi$ ; если вмѣсто различныхъ знаковъ условимся при  $\alpha$  ставить тоже коэффициентъ, а именно  $(-1)^k$ , то при  $x$  четномъ получимъ  $(-1)^k \cdot \alpha = +\alpha$ , при  $k$  нечетномъ —  $(-1)^k \cdot \alpha = -\alpha$ ; слѣдовательно:

$$3) \quad \text{ArcSin } a = k\pi + (-1)^k \cdot \alpha,$$

гдѣ  $\alpha$  — наименьшій изъ положительныхъ угловъ, имѣющихъ данный синусъ.

Сравнивая между собою чертежи 23 и 28, мы видимъ, что арксинусъ и арккосекансъ имѣютъ одинаковыя рѣшенія, поэтому:

$$4) \quad \text{ArcCosec } f = k\pi + (-1)^k \cdot \alpha.$$

II. Арккосинусъ и арксекансъ. Имѣемъ (согласно черт. 24):

$$x = \arccos b, \quad x_1 = \alpha, \quad x_2 = 2\pi - \alpha.$$

Прибавляя къ обоимъ рѣшеніямъ по  $2k\pi$  и замѣчая, что  $\cos [(2k+2)\pi - \alpha] = \cos (2k\pi - \alpha)$ , получимъ:

$$x_1 = 2k\pi + \alpha,$$

$$x_2 = 2k\pi - \alpha.$$

Эти двѣ формулы можно соединить въ одну общую:

$$5) \quad \text{ArcCos } b = 2k\pi \pm \alpha.$$

Изъ сравненія чертежей 24 и 27 заключаемъ, что арккосинусъ и арксекансъ имѣютъ одинаковыя рѣшенія, поэтому:

$$6) \quad \text{ArcSec } e = 2k\pi \pm \alpha.$$

III. Арктангенсъ и арккотангенсъ. Имѣемъ (черт. 25):

$$x = \text{ArcTg } c, \quad x_1 = \alpha, \quad x_2 = \pi + \alpha.$$

Прибавляя къ обоимъ рѣшеніямъ по  $2k\pi$ , получимъ:

$$x_1 = 2k\pi + \alpha,$$

$$x_2 = (2k+1)\pi + \alpha.$$

Замѣчая, что то или иное рѣшеніе зависитъ отъ четности коэффиціента при  $\pi$ , т. е. отъ четности числа  $k$ , получимъ общую формулу въ такомъ видѣ:

$$7) \quad \text{ArcTg } c = k\pi + \alpha.$$

Наконецъ, изъ сравненія чертежей 25 и 26 заключаемъ, что арктангенсъ и арккотангенсъ имѣютъ одинаковыя рѣшенія, слѣдовательно:

$$8) \quad \text{ArcCtg } d = k\pi + \alpha.$$

101. **Вычисленіе обратныхъ круговыхъ функцій.** Подобно круговымъ, и обратныя функціи можно разложить въ безконечные сходящіеся ряды и вычислить ихъ затѣмъ съ желаемою степенью точности. Этими рядами пользуются, напримѣръ, для вычисленія  $\pi$  съ какой угодно точностью [такъ какъ  $\text{arcTg } 1 = \frac{\pi}{4}$ ]; но вообще для нахожденія по даннымъ круговымъ функціямъ угловъ служатъ тѣ же, что и для функцій, тригонометрическія таблицы, натуральныя или логарифмическія.

102. **Зависимость между обратными круговыми функціями.** На основаніи свойствъ дополнительныхъ круговыхъ функцій легко вывести слѣдующія формулы:

$$9) \quad \begin{cases} \text{arcSin } a + \text{arcCos } a = \frac{\pi}{2}, \\ \text{arcTg } a + \text{arcCtg } a = \frac{\pi}{2}, \\ \text{arcSec } a + \text{arcCosec } a = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Докажемъ одну изъ этихъ формулъ, напримѣръ, первую. Имѣемъ:

$$x = \arcsin a, \sin x = a, \sin x = \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right),$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = a, \frac{\pi}{2} - x = \arccos a,$$

следовательно,  $\arcsin a + \arccos a = x + \left( \frac{\pi}{2} - x \right)$ ,  
откуда

$$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}.$$

Подобнымъ же образомъ выводятся и остальные формулы.

**103. Выраженія обратныхъ круговыхъ функцій черезъ одну изъ нихъ.** Каждую изъ обратныхъ круговыхъ функцій можно выразить черезъ любую изъ нихъ. Слѣдующая табличка, составленная по образцу такой же таблички для круговыхъ функцій (глава III, D), даетъ искомыя зависимости (см. стр. 223).

Здѣсь въ каждомъ столбцѣ даны выраженія всѣхъ обратныхъ круговыхъ функцій черезъ одну изъ нихъ: въ I-мъ — черезъ ArcSinus, во II-мъ — черезъ ArcCosinus и т. д.

Выводъ этихъ формулъ не представляетъ никакихъ затрудненій. Для примѣра найдемъ ArcSinus въ зависимости отъ ArcSecans.

Имѣемъ:

$$\begin{aligned} x = \arcsin a, \sin x = a, \sec x &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}}, \end{aligned}$$

| ArcSinus.                    | ArcCosinus.                  | ArcTangens.                  | Ar.Cotangens.                | ArcSecans.                   | ArcCosecans.                 |
|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| $ArcSin a$                   | $\pm \sqrt{1-a^2}$           | $\pm \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ | $\pm \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ | $\pm \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$ | $\frac{1}{a}$                |
| $\pm \sqrt{1-a^2}$           | $ArcCos a$                   | $\pm \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$ | $\pm \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$ | $\frac{1}{a}$                | $\pm \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$ |
| $\pm \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ | $\pm \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ | $ArcTg a$                    | $\frac{1}{a}$                | $\pm \sqrt{1+a^2}$           | $\pm \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$ |
| $\pm \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ | $\pm \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ | $\frac{1}{a}$                | $ArcCtg a$                   | $\pm \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$ | $\pm \sqrt{1+a^2}$           |
| $\pm \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ | $\frac{1}{a}$                | $\pm \sqrt{a^2-1}$           | $\pm \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ | $ArcSec a$                   | $\pm \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}$ |
| $\frac{1}{a}$                | $\pm \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ | $\pm \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ | $\pm \sqrt{a^2-1}$           | $\pm \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}$ | $ArcCosec a$                 |

$$x = \text{ArcSec} \left( \pm \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \right), \text{ArcSin } a = \\ = \text{ArcSec} \left( \pm \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \right);$$

то же выражение находимъ въ V-мъ столбцѣ 1-й строчки.

### Примѣры для упражненій.

Найти наименьшее значеніе и построить

1)  $\text{arcSin } \frac{1}{2}$ .

2)  $\text{arcCtg } \sqrt{3}$ .

3)  $\text{arcTg } (-2)$ .

4)  $\text{arcSec } \frac{9}{8}$ .

5)  $\text{arcCos } \left( -\frac{2}{3} \right)$ .

6)  $\text{arcTg } (-\text{tg } a)$ .

7)  $\text{arcTg } \{ \text{ctg } [\text{arcSin } (\cos 60^\circ)] \}$ .

Показать, что

8)  $\text{arcSin } \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{arcTg } \sqrt{3}$ .

9)  $\text{arcSec } (-3) = \text{arcTg } 2\sqrt{2}$ .

10)  $\text{arcCosec } 2 = \text{arcCos } \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

## В. Дѣйствія надъ обратными круговыми функціями.

104. Согласно предыдущему, всѣ обратныя круговыя функціи можно выразить черезъ одну изъ нихъ; поэтому я укажу здѣсь, какъ производить дѣйствія лишь надъ одноименными функціями.

Для упрощенія во всѣхъ дальнѣйшихъ выводахъ взяты наименьшія значенія функцій.

105. **Сложеніе и вычитаніе.** Если даны двѣ одноименныя обратныя круговыя функціи, то для ихъ суммы или разности нетрудно найти слѣдующія формулы:

$$10) \operatorname{arcSin} a \pm \operatorname{arcSin} b = \operatorname{arcsin} (a \sqrt{1-b^2} \pm b \sqrt{1-a^2}),$$

$$11) \operatorname{arcCos} a \pm \operatorname{arcCos} b = \operatorname{arcCos} (ab \mp \sqrt{1-a^2} \sqrt{1-b^2}),$$

$$12) \operatorname{arcTg} a \pm \operatorname{arcTg} b = \operatorname{arcTg} \frac{a \pm b}{1 \pm ab},$$

$$13) \operatorname{arcCtg} a \pm \operatorname{arcCtg} b = \operatorname{arcCtg} \frac{ab \mp 1}{a \pm b},$$

$$14) \operatorname{arcSec} a \pm \operatorname{arcSec} b = \operatorname{arcSec} \frac{ab}{1 \mp \sqrt{a^2-1} \sqrt{b^2-1}},$$

$$15) \operatorname{arcCosec} a \pm \operatorname{arcCosec} b = \operatorname{arcCosec} \frac{ab}{\sqrt{b^2-1} \pm \sqrt{a^2-1}}.$$

Первыя 4 формулы получаютъ непосредственно изъ теоремы сложенія (глава III, В); 5-я и 6-я выводятся одинаково. Выведемъ для примѣра послѣднюю.

Имѣемъ:

$$x = \operatorname{arcCosec} a, y = \operatorname{arcCosec} b, \operatorname{cosec} x = a, \operatorname{cosec} y = b,$$

$$\sin x = \frac{1}{a}, \sin y = \frac{1}{b}, \sin (x \pm y) = \sin x \cos y \pm$$

$$\pm \cos x \sin y,$$

$$\sin (x \pm y) = \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{1}{b^2}} \pm \frac{1}{b} \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 1}}{ab} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{ab},$$

$$\operatorname{cosec} (x \pm y) = \frac{1}{\sin (x \pm y)} = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - 1} \pm \sqrt{a^2 - 1}}.$$

Итакъ:

$$\operatorname{arcCosec} a \pm \operatorname{arcCosec} b = \operatorname{arcCosec} \frac{ab}{\sqrt{b^2 - 1} \pm \sqrt{a^2 - 1}},$$

что и т. д.

106. **Умноженіе.** — Если намъ дана нѣкоторая обратная круговая функція и требуется найти новую одноименную функцію, въ  $n$  разъ больше данной, т. е. умножить функцію на цѣлое число  $n$ , то эта задача приводится къ сложенію  $n$  одинаковыхъ функцій, что можетъ быть сдѣлано при помощи формулъ 10 — 15.

Въ частныхъ случаяхъ, при  $n=2$  и  $n=3$ , легко найти слѣдующія формулы:

$$16) \quad 2 \operatorname{arcSin} a = \operatorname{arcCos} (1 - 2a^2),$$

$$17) \quad 2 \operatorname{arcCos} a = \operatorname{arcCos} (2a^2 - 1),$$

$$18) \quad 2 \operatorname{arcTg} a = \operatorname{arcTg} \frac{2a}{1 - a^2},$$

$$19) \quad 2 \operatorname{arcCtg} a = \operatorname{arcCtg} \frac{a^2 - 1}{2a},$$

$$20) \quad 2 \operatorname{arcSec} a = \operatorname{arcSec} \frac{a^2}{2 - a^2},$$

$$21) \quad 2 \operatorname{arcCosec} a = \operatorname{arcCos} \frac{a^2 - 2}{a^2}.$$

Первая формула выводится изъ  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ , послѣдняя — изъ той же формулы съ замѣной  $\sin^2 x$  на  $\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x}$ , т. е. изъ формулы  $\cos 2x = 1 -$

—  $\frac{2}{\operatorname{cosec}^2 x}$ ; остальные четыре — изъ соотвѣтственныхъ формулъ 10 — 15.

Выраженія для  $2 \operatorname{arcSin} a$  и  $2 \operatorname{arcCosec} a$  черезъ одноименныя функціи будутъ ирраціональны и потому имъ предпочтены данныя здѣсь.

Изъ формулъ для функцій тройныхъ угловъ (глава III, C) легко получить слѣдующую группу формулъ:

$$22) \quad 3 \operatorname{arcSin} a = \operatorname{arcSin} (3a - 4a^3),$$

$$23) \quad 3 \operatorname{arcCos} a = \operatorname{arcCos} (4a^3 - 3a),$$

$$24) \quad 3 \operatorname{arcTg} a = \operatorname{arcTg} \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2},$$

$$25) \quad 3 \operatorname{arcCtg} a = \operatorname{arcCtg} \frac{a^3 - 3a}{3a^2 - 1},$$

$$26) \quad 3 \operatorname{arcSec} a = \operatorname{arcSec} \frac{a^3}{4 - 3a^2},$$

$$27) \quad 3 \operatorname{arcCosec} a = \operatorname{arcCosec} \frac{a^3}{3a^2 - 4}.$$

**107. Дѣленіе.** Если нужно найти частное отъ дѣленія обратной круговой функціи на цѣлое число  $n$  то для этого пользуются формулами для круговыхъ функцій кратныхъ угловъ (двойныхъ, тройныхъ и, т. д.), а затѣмъ, путемъ рѣшенія соотвѣтственныхъ уравненій, находятъ искомыя зависимости. Эти задачи рѣшаются элементарно лишь при  $n = 2^k$ , гдѣ  $k$  число цѣлое.

При  $n = 2$  легко получить изъ формулъ для половинныхъ угловъ слѣдующую группу

$$28) \quad \frac{\text{arcSin } a}{2} = \text{arcSin } \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{2}},$$

$$29) \quad \frac{\text{arcCos } a}{2} = \text{arcCos } \sqrt{\frac{1 + a}{2}},$$

$$30) \quad \frac{\text{arcTg } a}{2} = \text{arcTg } \frac{\sqrt{1 + a^2} - 1}{a},$$

$$31) \quad \frac{\text{arcCtg } a}{2} = \text{arcCtg } \frac{1 + \sqrt{1 + a^2}}{a},$$

$$32) \quad \frac{\text{arcSec } a}{2} = \text{arcSec } \sqrt{\frac{2a}{a + 1}},$$

$$33) \quad \frac{\text{arcCosec } a}{2} = \text{arcCosec } \sqrt{\frac{2a}{a - \sqrt{a^2 - 1}}}.$$

108. **Общее замѣчаніе.**— Безъ сомнѣнія, нѣтъ никакихъ основаній заучивать формулы 10 — 33 наизусть. Если онѣ и помѣщены здѣсь группами, то это сдѣлано вотъ для чего.

Во I-хъ, показать, что *теоретически* возможно найти между обратными круговыми функціями различныя соотношенія на подобіе такихъ же соотношеній между прямыми круговыми функціями.

Во II-хъ, дать возможность сопоставить аналогичныя формулы для прямыхъ и обратныхъ функцій и убѣдиться такимъ образомъ въ ихъ тождественности.

Напримѣръ, формулы

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

и 
$$3 \text{ arcCos } a = \text{arcCos } (4a^3 - 3a),$$

при условіи  $\cos x = a$ , выражаютъ одну и ту же зависимость.

Въ III-хъ, указать на *практическій* ходъ рѣшенія подобныхъ задачъ, и

Въ IV-хъ, дать готовый матеріалъ для упражненій.

**Примѣръ 1.** Найти  $\operatorname{arcTg} \frac{1}{7} + \operatorname{arcTg} \frac{3}{4}$ .

По формулѣ 12-й находимъ

$$\operatorname{arcTg} \frac{1}{7} + \operatorname{arcTg} \frac{3}{4} = \operatorname{arcTg} \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = \operatorname{arcTg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

**Примѣръ 2.** Найти  $\frac{\operatorname{arCos} 0}{3}$ .

Имѣемъ:

$$\operatorname{arCos} 0 = 3x, \operatorname{Cos} 3x = 0, 4 \cos^3 x - 3 \cos x = 0,$$

откуда

$$\cos x = 0, x_1 = \frac{\pi}{2};$$

$$4 \cos^2 x - 3 = 0, \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6}, x_3 = \frac{5\pi}{6}.$$

Такъ какъ намъ нужно было найти наименьшее значеніе нашей дроби, то

$$\frac{\operatorname{arCos} 0}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

**Примѣръ 3.** Показать справедливость равенства

$$\operatorname{arCos} \frac{20}{29} - \operatorname{arcTg} \frac{16}{63} = \operatorname{arCos} \frac{1596}{1885}.$$

Замѣнимъ  $\operatorname{arcTg}$  черезъ  $\operatorname{arCos}$ , пользуясь таблицей § 103

$$\operatorname{arcTg} \frac{16}{63} = \operatorname{arCos} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{16}{63}\right)^2}} = \operatorname{arCos} \frac{63}{65}.$$

Далѣ по формулѣ 11-й

$$\begin{aligned} \arccos \frac{20}{29} - \arccos \frac{63}{65} &= \arccos \left[ \frac{20 \cdot 63}{29 \cdot 65} + \sqrt{1 - \left( \frac{20}{29} \right)^2} \cdot \right. \\ &\cdot \left. \sqrt{1 - \left( \frac{63}{65} \right)^2} \right] = \arccos \left( \frac{1260}{1885} + \frac{21 \cdot 16}{1885} \right) = \arccos \frac{1596}{1885}, \end{aligned}$$

что и т. д.

### Примѣры для упражненій.

Вычислить выраженія

1.  $\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{4}{5}$ .
  2.  $\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}$ .
  3.  $\operatorname{arcSec} \frac{1}{2} + \operatorname{arcCosec} \frac{1}{2}$ .
  4.  $3 \arcsin \frac{1}{4}$ .
  5.  $\frac{\operatorname{arcCosec} (-1)}{2}$ .
  6.  $3 \arctg \sqrt{3}$ .
  7.  $4 \operatorname{arcCtg} \frac{2}{3}$ .
  8.  $\frac{\arccos \frac{1}{2}}{4}$ .
  9.  $\arctg \frac{1}{7} + 2 \arctg \frac{1}{3}$ .
  10.  $\operatorname{arcCtg} 7 + 2 \operatorname{arcCtg} 3$  (Arts-et-Metiers. — Châlons).
  11.  $\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{5} + \arctg \frac{1}{8}$ .
  12.  $\operatorname{tg} (4 \arctg 3)$ .
- Показать справедливость равенствъ
13.  $\arctg \frac{1}{70} = \operatorname{arcCtg} \frac{1}{83} + \operatorname{arcCtg} \frac{1}{447}$ .

$$14. \operatorname{arcTg} \frac{p}{q} + \operatorname{arcTg} \frac{q-p}{q+p} = \frac{\pi}{4}.$$

$$15. 2 \operatorname{arcTg} \sqrt{\frac{x}{a}} = \operatorname{arcCos} \frac{a-x}{a+x}.$$

$$16. \operatorname{arcCos} \frac{9}{\sqrt{82}} + \operatorname{arcSec} \frac{\sqrt{41}}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$$17. 4 \operatorname{arcTg} \frac{1}{5} - \operatorname{arcTg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4} \text{ (Machin).}$$

$$18. \operatorname{arcSin} \frac{4}{5} + \operatorname{arcSin} \frac{5}{13} + \operatorname{arcCos} \frac{63}{65} = \frac{\pi}{2}.$$

$$19. \operatorname{arcCtg} \left[ \frac{2}{a} + \frac{ab(b+1)}{2} \right] = \operatorname{arcTg} \frac{(b+1)a}{2} - \\ - \operatorname{arcTg} \frac{ab}{2}.$$

$$20. \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \operatorname{arcCos} \frac{a}{b} \right) + \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arcCos} \frac{a}{b} \right) = \\ = \frac{2b}{a}.$$


---

## Глава VII. Гоніометрическія уравненія.

109. **Опредѣленія.** — I. Если въ уравненіе входятъ гоніометрическія функціи одного или нѣсколькихъ неизвѣстныхъ угловъ, то такое уравненіе называется *гоніометрическимъ*.

II. *Рѣшитъ* гоніометрическое уравненіе значитъ найти всѣ значенія неизвѣстныхъ угловъ, удовлетво-  
ряющія данному уравненію.

110. **Рѣшеніе уравненія.** — Изъ вышесказаннаго слѣдуетъ, что входящія въ уравненіе функціи угловъ играютъ роль *вспомогательныхъ* неизвѣстныхъ; опредѣливъ же одну изъ этихъ функцій, мы можемъ всегда найти и искомый уголъ. Поэтому для полнаго рѣшенія гоніометрическаго уравненія необходимо:

1°, найти одну изъ круговыхъ функцій искомага угла, и

2°, найти всѣ углы, удовлетворяющіе найденному значенію круговой функціи.

Первая задача рѣшается при помощи алгебры, вторая — на основаніи общихъ формулъ для обратныхъ круговыхъ функцій (глава VI, § 100).

Такъ какъ общія формулы даютъ лишь *видъ* угловъ, число же рѣшеній безконечно большое, то гониометрическія уравненія слѣдуетъ признать трансцендентными, и въ силу этого, при современном положеніи математическаго анализа, нельзя дать ихъ общей теоріи.

Прежде чѣмъ перейти къ наиболѣе употребительнымъ приемамъ, или методамъ, рѣшенія гониометрическихъ уравненій, полезно обратить вниманіе на слѣдующія два замѣчанія.

**111. Замѣчаніе 1-ое.** — Если предоставленъ выборъ между синусомъ, косинусомъ и тангенсомъ, какъ вспомогательными неизвѣстными, то предпочтеніе слѣдуетъ отдать *тангенсу*. Это соображеніе вытекаетъ изъ двухъ обстоятельствъ: 1°, углы опредѣляются точнѣе по тангенсу и 2°, общія формулы для арктангенса наиболѣе простого вида.

Если предоставленъ выборъ между синусомъ и косинусомъ, то лучше брать косинусъ, какъ дающій общую формулу болѣе удобную, чѣмъ синусъ.

**Замѣчаніе 2-ое.** — Углы по таблицамъ вычисляются въ градусахъ, а по общимъ формуламъ они даны въ радіанахъ, поэтому часто встрѣчаются неправильныя записи въ родѣ слѣдующихъ

$$2k\pi \pm 45^\circ, k\pi + 30^\circ \text{ и т. п.}$$

Такъ какъ складывать и вычитать можно лишь однородныя величины, то въ одной и той же формулѣ нельзя соединять градусовъ и радиановъ. Поэтому предыдущія записи надо представить такъ

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ и т. п.}$$

или

$$360^\circ k \pm 45^\circ, 180^\circ k + 30^\circ \text{ и т. п.}$$

### А. Главныя методы рѣшенія.

**12. Метода приведенія.** — Если тригонометрическое уравненіе содержитъ нѣсколько тригонометрическихъ функций одного и того же неизвестнаго угла, то всѣ функции можно выразить черезъ одну изъ нихъ; полученное такимъ образомъ преобразованное уравненіе наз. **приведеннымъ**.

Приведеніе уравненія легко выполнить по соотношеніямъ главы III-ей, D (см. таблицу). Но въ результатѣ преобразованій почти всегда получаются ирраціональныя и двузначныя выраженія, а избавленіе уравненія отъ нихъ вводитъ постороннія рѣшенія. Если же пользоваться теоремой § 63, то теоретически она примѣнима ко всякому уравненію, но на практикѣ часто приводитъ къ уравненіямъ высокихъ степеней.

Профессоръ Парижскаго лицея Louis-le-Grand, Ch. Biöche, недавно указалъ простое и изящное правило, руководствуясь которымъ можно всегда избѣжать ирраціональности и двузначности преобразованій. Это правило можно формулировать такъ.

**113. Теорема Біюша.**—1°. Если тригонометрическое уравнение не мѣняетъ знака при подстановкѣ вмѣсто неизвѣстнаго угла  $x$  или  $\pi + x$ , или  $\pi - x$ , или  $-x$ , то за вспомогательную неизвѣстную нужно принять или  $\operatorname{tg} x$ , или  $\sin x$ , или  $\cos x$ .

2°. Если тригонометрическое уравнение мѣняетъ знакъ при подстановкѣ вмѣсто  $x$  или  $\pi + x$ , или  $\pi - x$ , или  $-x$ , то за вспомогательную неизвѣстную нужно принять  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

Доказательство второй части теоремы основано на упоминаемой уже теоремѣ § 63. Первая же часть вытекаетъ непосредственно изъ общихъ свойствъ круговыхъ функций. Въ самомъ дѣлѣ имѣемъ

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} x &= \operatorname{tg} (\pi + x), \\ \sin x &= \sin (\pi - x), \\ \cos x &= \cos (-x).\end{aligned}$$

Слѣдовательно, если уравненіе при одной изъ указанныхъ подстановокъ не мѣняетъ знака, то это показываетъ, что уравненіе на самомъ дѣлѣ содержитъ только одну неизвѣстную функцию: тангенсъ, синусъ, косинусъ; приведеніе уравненія къ этой функции совершается путемъ рациональныхъ преобразованій.

### Примѣры.

**Примѣръ 1.** Рѣшить уравненіе

$$\sin 3x = \cos x - \sin x.$$

Подстановка  $\pi + x$  мѣняетъ знаки всѣхъ членовъ уравненія, слѣдовательно, само уравненіе не мѣняетъ

знака; поэтому за вспомогательную неизвѣстную примемъ  $\operatorname{tg} x$ .

Простыя преобразованія даютъ

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x = \cos x - \sin x,$$

$$3 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{tg} x \sin^2 x = 1 - \operatorname{tg} x,$$

$$4 \operatorname{tg} x - 1 - \frac{4 \operatorname{tg}^3 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0.$$

Мы получили квадратное уравненіе относительно  $\operatorname{tg} x$ . Рѣшая его, находимъ

$$\operatorname{tg} x = 2 \pm \sqrt{3},$$

$$x_1 = k\pi + \operatorname{arctg}(2 + \sqrt{3}),$$

$$x_2 = k\pi + \operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3}).$$

Кромѣ того, при дѣленіи уравненія на  $\cos x$  мы потеряли корень  $x = \frac{\pi}{2}$ , поэтому

$$x_3 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}.$$

**Примѣръ 2.** Рѣшить уравненіе

$$\sec x = \sin x + \cos x.$$

Подобно предыдущему, подстановка  $\pi + x$  не мѣняетъ знака уравненія, поэтому приведемъ уравненіе къ  $\operatorname{tg} x$ . Для этого помножаемъ обѣ части на  $\sec x$  (такъ какъ  $\cos x = 0$  не даетъ корня даннаго уравненія)

$$\sec^2 x = \operatorname{tg} x + 1,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \operatorname{tg} x + 1,$$

$$\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 1) = 0,$$

откуда мы приходимъ къ 2 уравненіямъ

$$1. \operatorname{tg} x = 0, \quad 2. \operatorname{tg} x = 1.$$

Поэтому

$$x_1 = k\pi, \quad x_2 = k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

**Примѣръ 3.** Рѣшить уравненіе

$$\frac{4 [\sec x + \operatorname{tg} x (8 \sin x - 9)]}{\sin 2x (9 - 2 \sin x)} = -1.$$

Подстановка  $\pi - x$  измѣняетъ знакъ у  $\sec x$ ,  $\operatorname{tg} x$  и  $\sin 2x$ , т. е. мѣняетъ знакъ числителя и знаменателя; поэтому вся *дробь знака не мѣняетъ*.

Приводимъ уравненіе къ  $\sin x$ , помножая числителя и знаменателя на  $\cos x$

$$\frac{4 (1 + 8 \sin^2 x - 9 \sin x)}{2 \sin x \cos^2 x (9 - 2 \sin x)} = -1,$$

$$2 \sin^4 x - 9 \sin^3 x + 14 \sin^2 x - 9 \sin x + 2 = 0.$$

Мы получили возвратное уравненіе 4-ой степени 1-го рода относительно  $\sin x$ .

Рѣшая его по правиламъ алгебры (подстановка  $\sin x + \frac{1}{\sin x} = y$ ), получимъ

$$2y^2 - 9y + 10 = 0,$$

$$y_1 = 2, \quad y_2 = \frac{5}{2}.$$

Отсюда мы имѣемъ два уравненія для опредѣленія  $\sin x$

$$1. \sin^2 x - 2 \sin x + 1 = 0,$$

$$2. \sin^2 x - \frac{5}{2} \sin x + 1 = 0.$$

Первое изъ нихъ даетъ два равныхъ корня  $\sin x = 1$ , откуда  $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{2}$ . Но мы умножали уравненіе на  $\cos x$ , что равносильно прибавленію посторонняго корня  $x = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ ; слѣдовательно, одинъ изъ полученныхъ корней принадлежитъ уравненію, а другой—паразитный. Отбрасывая его, находимъ одно рѣшеніе

$$x_1 = (4k + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Второе уравненіе даетъ  $\sin x = \frac{1}{2}$  (такъ какъ корень  $\sin x = 2$ , очевидно, невозможенъ), откуда  $x_2 = \frac{\pi}{6}$  и

$$x_2 = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}.$$

**Примѣръ 4.** Рѣшить уравненіе

$$\sec x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x.$$

Здѣсь всѣ три подстановки мѣняютъ знакъ уравненія, поэтому приведемъ его къ  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Простыя преобразованія даютъ

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}},$$

$$\left(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) = \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) \left(1 + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right),$$

$$\left(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0,$$

$$1. \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \quad 2. \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0,$$

$$x_1 = (2k+1) \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = k\pi.$$

### Примѣры для рѣшенія.

1.  $\sec x + \sin x = \cos x.$
2.  $1 + \cos 2x = \sin x + \operatorname{tg} x.$
3.  $3 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 5 \operatorname{cosec} x.$
4.  $6 \sin 2x + 5 = 3 (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x).$
5.  $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x + 2 = 0.$
6.  $5 \sin^2 x - 2 \cos^2 x = 3 \sin x \cos x.$
7.  $7 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x = 15 \cos^2 x.$
8.  $2 \sin x = \sin (45^\circ - x).$
9.  $2 \sin 3x = 3 \cos x + \cos 3x.$
10.  $8 \cos^4 x = 5 + 2 \sin^2 x + 3 \cos^2 x - 15 \sin^2 x \cos^2 x - 15 \sin^3 x \cos x.$

114. Предыдущіе примѣры показали, что метода приведенія уравненій, несмотря на свою общность, сопряжена съ многочисленными и утомительными выкладками. Поэтому, *когда можно*, надо прибѣгать къ другимъ пріемамъ; ими мы и займемся.

115. Метода разложенія. — Если тригонометрическое уравненіе вида  $P = 0$  таково, что полиномъ  $P$  можно представить въ видѣ произведенія  $A \cdot B \cdot C \dots K$ , идѣ

*А, В, С, . . . . , К суть выраженія, содержащія тригонометрическія функціи неизвестнаго угла, то рѣшеніе даннаго уравненія приводится къ рѣшенію нѣсколькихъ уравненій болѣе простаго вида.*

### Примѣры.

**Примѣръ 5.** Рѣшить уравненіе

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

Лѣвая часть этого уравненія легко разлагается на множителей

$$2 \sin 2x \cos x + \sin 2x = 0,$$

$$\sin 2x (2 \cos x + 1) = 0,$$

что даетъ систему двухъ уравненій

$$1. \sin 2x = 0, \quad 2 \cos x + 1 = 0,$$

откуда

$$2x_1 = k\pi, \quad x_2 = \frac{2\pi}{3},$$

$$x_1 = k\frac{\pi}{2}, \quad x_2 = (3k \pm 1)\frac{2\pi}{3}.$$

**Примѣръ 6.** Рѣшить уравненіе

$$\sin 2x = \operatorname{tg} x.$$

Имѣемъ

$$2 \sin x \cos x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0,$$

$$\sin x \left( 2 \cos x - \frac{1}{\cos x} \right) = 0,$$

$$1. \sin x = 0. \quad 2. 2 \cos^2 x - 1 = 0,$$

$$x_1 = 0, \quad x_1 = k\pi;$$

второе уравненіе даетъ для косинуса два значенія:

$$+\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } -\frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ поэтому } x_2 = \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \pi - \frac{\pi}{4} \text{ и}$$

окончательно

$$x_2 = (8k \pm 1) \frac{\pi}{4},$$

$$x_3 = (8k \pm 3) \frac{\pi}{4}.$$

**Примѣръ 7.** Рѣшить уравненіе

$$\sin^2 x - 3 \cos^2 x + 2 \sin 2x = 1,$$

**Имѣемъ**

$$4 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0,$$

$$\cos x (\sin x - \cos x) = 0,$$

$$1. \cos x = 0, \quad 2. \sin x - \cos x = 0,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_1 = (4k \pm 1) \frac{\pi}{2}.$$

Второе уравненіе приводится къ виду

$$\operatorname{tg} x = 1,$$

откуда

$$x_2 = \frac{\pi}{4},$$

$$x_2 = (4k + 1) \frac{\pi}{4}.$$

116. Иногда приходится примѣнять къ уравненію различные вспомогательные. приемы для того, чтобы привести къ виду, удобному для рѣшенія. Одинъ изъ такихъ приѣмовъ состоитъ въ томъ, что уравненію придаютъ видъ пропорціи и затѣмъ пользуются теоре-

мами о производныхъ пропорціяхъ. Разсмотримъ приложеніе этого приѣма къ типу уравненій, довольно распространенному.

**Примѣръ 8.** Рѣшить уравненіе

$$p \sin (a-x)=q \sin (b-x) .$$

Имѣемъ

$$\begin{aligned} \frac{\sin (a-x)}{\sin (b-x)} &= \frac{q}{p}, \\ \frac{\sin (a-x)+\sin (b-x)}{\sin (a-x)-\sin (b-x)} &= \frac{q+p}{q-p}, \\ \operatorname{tg}\left(\frac{a+b}{2}-x\right) &= \frac{q+p}{q-p} \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}, \\ x &= \frac{a+b}{2}-\operatorname{ArcTg}\left[\frac{q+p}{q-p} \operatorname{tg} \frac{a-b}{2}\right] . \end{aligned}$$

**Замѣчаніе.** Можно, конечно, поступить иначе: раскрывъ скобки въ обѣихъ частяхъ уравненія, найти  $\operatorname{tg} x$  и вычислить его, пользуясь методомъ введенія вспомогательнаго угла. Однако этотъ приѣмъ слишкомъ неудобенъ и тяжелъ, и имъ не пользуются.

**Примѣры для рѣшенія.**

11.  $\cos x-\cos 4 x+\cos 7 x=0$ .
12.  $\sin x+\sin 2 x+\sin 3 x=1+\cos x+\cos 2 x$ .
13.  $1+\cos x+\cos 2 x+\cos 3 x=0$ .
14.  $\sin (x-a)=\sin x-\sin a$ .
15.  $2 \sin ^2 3 x+\sin ^2 6 x=2$ .
16.  $\sin 7 x-\sin x=\sin 3 x$ .
17.  $\sin ^2\left(x+15^{\circ}\right)-\sin ^2\left(x-15^{\circ}\right)=\frac{1}{4}$ .
18.  $\frac{\sin x+\sin 3 x+\sin 5 x}{\cos x+\cos 3 x+\cos 5 x}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \operatorname{tg} x$ .

$$19. \operatorname{tg}(a+x) \operatorname{tg}(a-x) = \frac{1 - 2 \cos 2a}{1 + 2 \cos 2a}.$$

$$20. \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 8 \cos^2 x.$$

117. **Метода сравненія.**—Если тригонометрическое уравнение приводится къ виду  $M=N$ , гдѣ  $M$  и  $N$  двѣ одинаковыя функціи различныхъ угловъ, то равенство функцій можно замѣнить равенствомъ угловъ.

**Примѣръ 9.** Рѣшить уравненіе

$$\sin x = \cos 2x.$$

Пользуясь свойствомъ дополнительныхъ угловъ находимъ

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos 2x.$$

Такъ какъ *косинусъ*—функція четная, то возможны два равенства между углами

$$1^\circ. \frac{\pi}{2} - x = 2x, \quad 2^\circ. \frac{\pi}{2} - x = -2x.$$

Рѣшая ихъ, находимъ

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_1 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6},$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{2}, \quad x_2 = (4k \mp 1) \frac{\pi}{2}.$$

Легко убѣдиться при помощи подстановки, что оба корня удовлетворяютъ данному уравненію.

**Замѣчаніе.** Если бы порядокъ рѣшенія былъ слѣдующій

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right),$$

то мы бы получили:  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$ . Здѣсь два неудобства. Во 1-хъ, легко забыть, что второй корень получается при условіи:  $\cos 2x = \cos (\pm 2x)$ ! Во 2-хъ, общія формулы для  $x$  имѣютъ сложный видъ, на что указывалось и раньше.

Поэтому, при пользованіи методою сравненія нужно приводить обѣ части уравненій къ косинусамъ, а не къ синусамъ.

**Примѣръ 10.** Рѣшить уравненіе

$$\operatorname{tg} mx \cdot \operatorname{tg} nx = 1.$$

Имѣемъ

$$\operatorname{tg} mx = \operatorname{ctg} nx,$$

$$\operatorname{tg} mx = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - nx \right),$$

$$mx = \frac{\pi}{2} - nx,$$

$$x = \frac{\pi}{2(m+n)},$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2(m+n)}.$$

Уравненіе рѣшается при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ  $m$  и  $n$ .

**Примѣръ 11.** Рѣшить уравненіе

$$\sin (20^\circ - 5x) = \cos (30^\circ + 5x).$$

Поступая какъ раньше, находимъ

$$\cos (70^\circ + 5x) = \cos (30^\circ + 5x),$$

$$1^\circ. \quad 70^\circ + 5x = 30^\circ + 5x,$$

$$2^\circ. \quad 70^\circ + 5x = -(30^\circ + 5x).$$

Первое уравнение приводит къ абсурду:  $70^\circ = 30^\circ$ !  
Второе даетъ для  $x$  вѣрное значеніе —  $10^\circ$ . Итакъ

$$x = 2k \mp \frac{\pi}{18}.$$

118. Въ заключеніе я покажу, что уравненія 9-ое и 11-ое можно рѣшить и иначе. Такъ для перваго изъ нихъ мы находимъ

$$\sin x = \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x,$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0,$$

$$1^\circ. \sin x = \frac{1}{2}, \quad 2^\circ. \sin x = -1,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Для рѣшенія второго уравненія воспользуемся теоремой сложения:

$$\sin (20^\circ - 5x) = \cos (30^\circ + 5x),$$

$$\begin{aligned} \sin 20^\circ \cos 5x - \cos 20^\circ \sin 5x &= \cos 30^\circ \cos 5x - \\ &- \sin 30^\circ \sin 5x, \end{aligned}$$

$$(\sin 30^\circ - \cos 20^\circ) \sin 5x = (\cos 30^\circ - \sin 20^\circ) \cos 5x,$$

$$\operatorname{tg} 5x = \frac{\cos 30^\circ - \sin 20^\circ}{\sin 30^\circ - \cos 20^\circ},$$

$$\operatorname{tg} 5x = \frac{2 \cos 40^\circ \sin 20^\circ}{-2 \cos 50^\circ \sin 20^\circ},$$

$$\operatorname{tg} 5x = -\operatorname{tg} 50^\circ,$$

$$x = -10^\circ.$$

Предоставляю читателямъ опредѣлить сравнительное достоинство указанныхъ приѣмовъ, а также обратить вниманіе, что уравненіе 10-ое элементарно рѣшится иначе — нельзя.

### Примѣры для рѣшенія.

$$21. \cos 5x + \sin x = 0.$$

$$22. \operatorname{ctg} 5x + \operatorname{tg} 1000^\circ = 0.$$

$$23. \sin 2x = \cos (x + h).$$

$$24. \cos x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$25. \sin \left( \frac{2}{3} x - 45^\circ \right) + \cos \left( \frac{3}{2} x + 45^\circ \right) = 0.$$

$$26. \operatorname{tg} \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - 3x \right) = 0.$$

$$27. \sin \left( \frac{3\pi}{2} + x \right) + \cos 3x = 0.$$

$$28. \sin x \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \cos x.$$

$$29. \cos^2 \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin^2 (\pi - 2x).$$

$$30. \cos^2 \frac{x-a}{2} + \cos^2 \frac{x+a}{2} = 1.$$

### В. Рѣшеніе нѣкоторыхъ типичныхъ уравненій и системъ.

119. Уравненіе  $a \sin x + b \cos x = c$ .—Это уравненіе принадлежитъ къ числу классическихъ и ему придаютъ большое значеніе. Во I-хъ, къ нему приводится весьма много гониометрическихъ уравненій различныхъ типовъ; во II-хъ, оно является результатомъ сложенія двухъ гармоническихъ колебательныхъ движеній одного періода, одной траекторіи и равныхъ фазъ.

Изъ числа различныхъ рѣшеній этого уравненія рассмотримъ слѣдующихъ два.

*1-ое рѣшеніе.* Пользуясь методомъ вспомогательнаго угла, находимъ

$$a \sin x + b \cos x = a \sec \varphi \sin (x + \varphi),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \quad \sec^2 \varphi = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{a^2 + b^2}{a^2};$$

подставляя найденныя выраженія въ уравненіе, окончательно получимъ

$$1) \quad \sin (x + \varphi) = \frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пусть  $\operatorname{arcsin} \frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}} = \alpha$ , тогда  $x = \alpha - \varphi$  и окончательно

$$x_1 = 2k\pi + \alpha - \varphi,$$

$$x_2 = (2k + 1)\pi - \alpha - \varphi.$$

**Исслѣдованіе.** — Выраженіе  $a^2 + b^2$  положительно при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ коэффициентовъ  $a$  и  $b$ , слѣдовательно,  $\sqrt{a^2 + b^2}$  — тоже вещественъ. Если  $a$  и  $b$  одного знака, то  $\operatorname{tg} \varphi$  положителенъ, уголъ  $\varphi$  острый и  $\sec \varphi$  тоже положителенъ; тогда передъ квадратнымъ корнемъ надо ставить знакъ «плюсъ». Если  $a$  и  $b$  разныхъ знаковъ, то  $\operatorname{tg} \varphi$  отрицателенъ,  $\varphi$  — уголъ тупой и  $\sec \varphi$  отрицателенъ; тогда передъ квадратнымъ корнемъ надо ставить знакъ «минусъ». Отсюда слѣдуетъ, что въ общей формулѣ (1) передъ корнемъ надо ставить два знака.

Далѣе, для того чтобы уравненіе  $a \sin x + b \cos x = c$

имѣло рѣшеніе, необходимо и достаточно существованіе неравенствъ

$$2) \quad -\sqrt{a^2+b^2} \leq c \leq +\sqrt{a^2+b^2}.$$

Если  $c = +\sqrt{a^2+b^2}$  или  $c = -\sqrt{a^2+b^2}$ , то данное уравненіе имѣетъ всего *одно* рѣшеніе (въ предѣлахъ одной окружности); если  $c < +\sqrt{a^2+b^2}$  или  $c > -\sqrt{a^2+b^2}$ , то возможны два взаимно-дополнительныхъ рѣшенія для  $(x + \varphi)$ , а, слѣдовательно, и *два* рѣшенія для угла  $x$ ; наконецъ, при  $c > +\sqrt{a^2+b^2}$  или  $c < -\sqrt{a^2+b^2}$  нѣтъ вовсе рѣшеній.

**2-ое рѣшеніе.** — Такъ какъ линія синуса можетъ быть разсматриваема какъ ордината, а линія косинуса—какъ абсцисса нѣкоторой точки окружности, заданной уравненіемъ

$$X^2 + Y^2 = R^2,$$

то  $\sin x = \frac{Y}{R}$ ,  $\cos x = \frac{X}{R}$  и наше уравненіе можно переписать такъ

$$bX + aY = cR;$$

оно представить тогда нѣкоторую прямую.

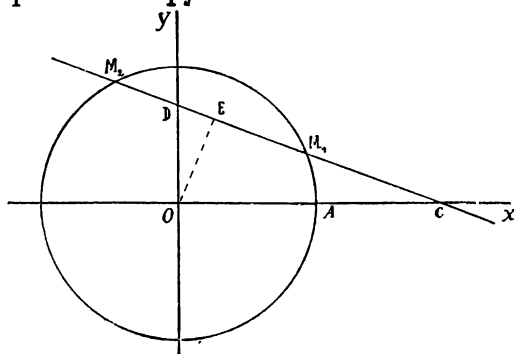
Для простоты разсужденій примемъ  $R = 1$  (т. е. сантиметръ, дюймъ, футъ и т. п.). Система уравненій

$$3) \quad \begin{cases} X^2 + Y^2 = 1, \\ bX + aY = c, \end{cases}$$

можетъ быть совмѣстной, и тогда рѣшенія этой системы будутъ также рѣшеніями основного уравненія.

Рѣшить *графически* систему (3) — это значитъ

найти точки пересѣченія данной прямой съ данной окружностью. Для этого изъ начала  $O$  прямоугольной системы координатъ (чер. 29) радіусомъ  $OA = 1$  описываемъ окружность. Затѣмъ откладываемъ на оси  $X$ -овъ отрѣзокъ  $OC = \frac{c}{b}$  и на оси  $Y$ -овъ отрѣзокъ  $OD = \frac{c}{a}$ , измѣряя ихъ въ частяхъ радіуса. Точки  $C$  и  $D$  принадлежатъ искомой прямой. Проведя ее черезъ  $C$  и  $D$ , мы найдемъ точки  $M_1$  и  $M_2$  пересѣченія прямой съ окружностью.



Черт. 29.

Углы  $AOM_1 = x_1$  и  $AOM_2 = x_2$  даютъ два значенія угла  $x$ , удовлетворяющія нашему уравненію  $a \sin x + b \cos x = c$ .

При построеніи мы предполагали, что  $a$ ,  $b$ ,  $c$  положительны. Если одно изъ нихъ отрицательно, то соотвѣтственнымъ образомъ измѣняется положеніе прямой. А именно: при отрицательномъ  $a$  прямая пройдетъ подъ осью  $X$ -овъ черезъ  $C$  и  $D_1$ , симметричную съ  $D$ ; при отрицательномъ  $b$  — слѣва направо, черезъ  $C_1$ , симметричную съ  $C$ , и черезъ  $D$ ; при отрицательномъ  $c$  — черезъ  $C_1$  и  $D_1$ .

**Исслѣдованіе.** Число рѣшеній зависитъ отъ положенія прямой относительно окружности. Если прямая — сѣкущая, то мы находимъ *два* рѣшенія; если прямая — касательная, *одно* рѣшеніе и если прямая — внѣшняя, то нѣтъ совсѣмъ рѣшеній. Эти положенія прямой аналитически характеризуются длиною перпендикуляра  $OE$ , какъ мѣрою разстоянія прямой отъ центра  $O$ .

Такъ какъ мы приняли  $R = 1$ , то при

$$OE < 1 \dots\dots 2 \text{ рѣш.},$$

$$OE = 1 \dots\dots 1 \text{ рѣш.},$$

$$OE > 1 \dots\dots 0 \text{ рѣш.}$$

Остается вычислить  $OE$  въ зависимости отъ  $a, b, c$ . Изъ  $\triangle ODC$  находимъ

$$OE \cdot CD = OC \cdot OD;$$

$$\text{но } OC = \frac{c}{b}, \quad OD = \frac{c}{a}, \quad CD = \pm \sqrt{OC^2 + OD^2} = \\ = \frac{\pm c \sqrt{a^2 + b^2}}{ab}, \text{ поэтому}$$

$$4) \quad OE = \frac{c}{\pm \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Отсюда мы заключаемъ, что наше уравненіе имѣетъ рѣшенія, если

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq c \leq +\sqrt{a^2 + b^2},$$

что вполне согласуется съ результатомъ, полученнымъ раньше.

120. Последнее рѣшеніе одно изъ самыхъ простыхъ и изящныхъ; его далъ въ 1907 г. F. Marotte, профессоръ Парижскаго лицея Charlemagne (см. La Revue de l'Enseignement des Sciences, 1907, № 3).

Другія рѣшенія можно найти у Desboves, Questions de Trigonometrie, p. 79.

121. Уравненіе  $aF^2(x) + bF(x) + c = 0$ .—Здѣсь  $F(x)$  обозначаетъ одну изъ 6 круговыхъ функцій угла  $x$ . Всѣ уравненія этого типа рѣшаются по общимъ правиламъ для квадратныхъ уравненій; необходимо только каждый разъ произвести изслѣдованіе рѣшенія.

Для примѣра возьмемъ уравненіе

$$2 \cos 2x = 3 \cos x.$$

Замѣняя  $\cos 2x$  черезъ  $2 \cos^2 x - 1$  и произведя упрощенія, получимъ

$$4 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0.$$

Мы пришли къ квадратному уравненію относительно  $\cos x$ .

Рѣшая его получимъ

$$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{8}.$$

Корень  $\frac{3 + \sqrt{41}}{8}$  не удовлетворяетъ данному уравненію, такъ какъ  $\sqrt{41} > 6$ , дробь  $\frac{3 + \sqrt{41}}{8}$  больше единицы, а косинусъ всегда не больше 1. Поэтому

$$\cos x = -\frac{\sqrt{41} - 3}{8}.$$

Мы видимъ, что уголъ  $x$  долженъ быть тупымъ. Сначала находимъ его избытокъ  $\alpha$ , полагая

$$\sin \alpha = +\frac{\sqrt{41} - 3}{8}.$$

Имѣемъ  $\sqrt{41} = 6,40312$  (прибл.),  $\sin \alpha = 0,42539$ .  
Слѣдовательно

$$\lg \sin \alpha = 9,62879 - 10,$$

$$\alpha = 25^\circ 10' 31''.$$

Такъ какъ  $x = 90^\circ + \alpha$ , то  $x = 115^\circ 10' 31''$  и окончательно

$$x = 360^\circ . k \pm 115^\circ 10' 31''.$$

**122. Уравненіе показательное.**—Возьмемъ уравненіе

$$5 \cdot 7^{\sin \left(45^\circ + \frac{x}{2}\right)} + \frac{2}{3} \cdot 7^{1 + \sin x} = 21.$$

Прежде всего находимъ

$$\begin{aligned} \sin^2 \left(45^\circ + \frac{x}{2}\right) &= \sin \left(45^\circ + \frac{x}{2}\right) \cos \left(45^\circ - \frac{x}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2} (\sin 90^\circ + \sin x) = \frac{1 + \sin x}{2}, \end{aligned}$$

поэтому наше уравненіе можно переписать такъ

$$5 \cdot 7^{\frac{1 + \sin x}{2}} + \frac{2}{3} \cdot 7^{1 + \sin x} = 21,$$

или, полагая  $7^{\frac{1 + \sin x}{2}} = y$ ,

$$2y^2 + 15y - 63 = 0.$$

Рѣшая послѣднее уравненіе, находимъ

$$y_1 = 3, \quad y_2 = -10,5.$$

Второй корень неудовлетворяетъ уравненію, такъ какъ  $7^{\frac{1 + \sin x}{2}}$  всегда величина положительная; поэтому  $7^{\frac{1 + \sin x}{2}} = 3$ , откуда

$$1 + \sin x = \frac{2 \lg 3}{\lg 7}, \quad \sin x = \frac{\lg 9 - \lg 7}{\lg 7},$$

$$\sin x = \frac{10914}{84510}.$$

Логариѣмируя послѣднее выраженіе и находя по таблицамъ  $x$ , окончательно получимъ

$$x = 7^\circ 25' 2'', 4.$$

**123. Уравненія, содержащія обратныя круговыя функціи.**—Уравненія этого типа рѣшаются двумя приемами: 1°, данное уравненіе приводятъ къ уравненію между круговыми функціями или углами; 2°, данному уравненію придаютъ видъ  $\arcsin F(x) = \arcsin F(y)$ , пользуясь формулами главы VI.

**Примѣръ 1.** Рѣшить уравненіе

$$7 \operatorname{arctg} x = 5 \operatorname{arccotg} x.$$

Полагая  $\operatorname{tg} a = x$ ,  $\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{2} - a \right) = x$ , находимъ

$$7a = 5 \left( \frac{\pi}{2} - a \right),$$

$$a = \frac{5\pi}{24},$$

$$x = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{24}$$

$$x = 0,7673.$$

**Примѣръ 2.** Рѣшить уравненіе

$$2 \operatorname{arccotg} 2 + \operatorname{arccos} \frac{3}{5} = \operatorname{arcsec} x.$$

Пользуясь формулами для обратныхъ круговыхъ функцій, находимъ

$$2 \operatorname{arcCtg} 2 = \operatorname{arcCtg} \frac{3}{4} = \operatorname{arcCos} \frac{3}{5},$$

$$2 \operatorname{arcCos} \frac{3}{5} = \operatorname{arcCos} \left( -\frac{7}{25} \right),$$

$$\operatorname{arcCos} \left( -\frac{7}{25} \right) = \operatorname{arcSec} x,$$

$$\operatorname{arcCos} \left( -\frac{7}{25} \right) = \operatorname{arcCos} \frac{1}{x},$$

$$x = -\frac{25}{7}.$$

**124. Системы уравнений съ 2 неизвѣстными.** — Слѣдующія системы встрѣчаются наиболѣе часто

$$1) \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \pm \sin y = m \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \pm \cos y = m \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = m \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\sin x}{\sin y} = n \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\cos x}{\cos y} = n \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = n \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \sin y = p \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cos y = p \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = p. \end{cases}$$

Первыя шесть системъ рѣшаются при помощи формулъ суммы и разности круговыхъ функцій (гл. V, § 87, I—IV); остальные три — при помощи обратныхъ формулъ (V).

**Примѣръ 1.** Рѣшить систему

$$(*) \quad \begin{cases} x + y = \alpha \\ \sin x + \sin y = m. \end{cases}$$

Второе уравненіе системы преобразуемъ такъ

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{x-y}{2} = m, \quad \cos \frac{x-y}{2} = \frac{m}{2 \sin \frac{\alpha}{2}},$$

$$\frac{x-y}{2} = \text{ArcCos} \frac{m}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Называя  $\text{arcCos} \frac{m}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$  черезъ  $\varphi$ , находимъ новую систему

$$(**) \quad \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{\alpha}{2} \\ \frac{x-y}{2} = 2k\pi \pm \varphi. \end{cases}$$

Рѣшая ее, находимъ

$$x = 2k\pi \pm \varphi + \frac{\alpha}{2},$$

$$y = -2k\pi \mp \varphi + \frac{\alpha}{2}.$$

**Изслѣдованіе.** Если система (\*) имѣетъ рѣшенія, то имѣютъ мѣсто неравенства

$$-1 \leq \frac{m}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \leq +1.$$

Ихъ можно замѣнить слѣдующими

$$\begin{aligned} -2 \sin \frac{\alpha}{2} \leq m \leq +2 \sin \frac{\alpha}{2} & \quad \text{если } \sin \frac{\alpha}{2} > 0, \\ +2 \sin \frac{\alpha}{2} \leq m \leq -2 \sin \frac{\alpha}{2} & \quad \text{если } \sin \frac{\alpha}{2} < 0. \end{aligned}$$

**Примѣръ 2.** Рѣшить систему

$$\begin{cases} x - y = \alpha \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = n. \end{cases}$$

Примѣнимъ ко второму уравненію теорему о производныхъ пропорціяхъ

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} = \frac{n+1}{n-1},$$

$$\frac{\sin (x+y)}{\sin (x-y)} = \frac{\sin (x+y)}{\sin \alpha} = \frac{n+1}{n-1},$$

$$\sin (x+y) = \frac{n+1}{n-1} \sin \alpha,$$

$$x+y = \operatorname{ArcSin} \left( \frac{n+1}{n-1} \sin \alpha \right).$$

Полагая по прежнему  $\operatorname{arcSin} \left( \frac{n+1}{n-1} \sin \alpha \right) = \varphi$ , получимъ систему

$$\begin{cases} x+y = k\pi + (-1)^k \varphi \\ x-y = \alpha \end{cases}$$

которую рѣшить легко. Изслѣдованіе производится какъ и раньше.

**Примѣръ 3.** Рѣшить систему

$$\begin{cases} x+y = \alpha \\ \sin x \sin y = p. \end{cases}$$

Имѣемъ

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos (x - y) - \cos (x + y)],$$

$$\cos (x - y) = 2p + \cos \alpha,$$

$$x - y = \text{ArcCos} (2p + \cos \alpha),$$

и мы приходимъ къ новой системѣ

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ x - y = 2k\pi \pm \varphi, \end{cases}$$

аналогичной системѣ (\*\*).

**Исслѣдованіе.** Для того, чтобы данная система имѣла рѣшенія, необходимо и достаточно

$$-1 \leq 2p + \cos \alpha \leq +1,$$

или

$$-\cos^2 \frac{\alpha}{2} \leq p \leq +\sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

125. Уравненія болѣе сложныхъ типовъ обыкновенно приводятся къ одному изъ разобранныхъ выше, равно какъ и уравненія съ 3 и болѣе неизвѣстными; разсматривать отдѣльно ихъ не будемъ.

### С. Задачи на составленіе и исслѣдованіе уравненій.

126. Задачи, приводящія къ составленію гониометрическихъ уравненій, принадлежатъ къ наиболѣе важнымъ и интереснымъ вопросамъ чистой и прикладной математики, физики, механики и астрономіи. Въ концѣ этой главы читатель найдетъ небольшое собраніе такихъ задачъ; здѣсь я ограничусь рѣшеніемъ нѣсколькихъ изъ нихъ, выдающихся въ исто-

рическомъ, научномъ или же методическомъ отношеніи.

**127. Задача Паппуса.** — *Черезъ точку  $M$ , взятую на биссектриссѣ прямого угла  $ХОУ$ , провести прямую такъ, чтобы ея часть  $AB$ , заключенная между сторонами угла, имѣла данную длину  $m$ .*

Эта задача представляетъ частный случай задачи Аполлонія Пергскаго (260—200 до Р. Х., прибл.). Первое ея рѣшеніе, геометрическое, дано Паппусомъ (въ концѣ III-го ст. п. Р. Х.) въ знаменитомъ трудѣ «*Collectiones mathematicae*». Рѣшеніемъ ея занимались многіе ученые.

Главный интересъ задачи представляетъ способъ рѣшенія. Въ то время какъ алгебраическіе способы приводятъ къ сложнымъ уравненіямъ 4-ой степени, рѣшаемымъ искусственными приемами <sup>1)</sup>, при помощи тригонометріи она рѣшается очень просто. Одно изъ такихъ рѣшеній мы сейчасъ рассмотримъ.

**Рѣшеніе.** Точка  $M$  (чер. 30) дана, слѣдовательно, абсцисса и ордината ея извѣстны; онѣ равны  $a$ . Называя уголъ прямой съ осью  $X$ -овъ черезъ  $x$ , находимъ

$$AM = \frac{a}{\sin x}, \quad MB = \frac{a}{\cos x},$$

$$1) \quad a \left( \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right) = m.$$

Рѣшаемъ полученное уравненіе

<sup>1)</sup> Семь рѣшеній см. у Маракуева, Элементарная алгебра, т. I, стр. 677.

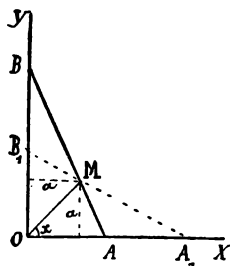
$$a (\sin x + \cos x) = m \sin x \cos x, \quad y$$

$$2a (\sin x + \cos x) = m \sin 2x,$$

$$4a^2 (1 + \sin 2x) = m^2 \sin^2 2x,$$

$$m^2 \sin^2 2x - 4a^2 \sin 2x - 4a^2 = 0,$$

$$2) \quad \sin 2x = \frac{2a}{m^2} (a \pm \sqrt{a^2 + m^2}).$$



Черт. 30.

**Изслѣдованіе.** Оба корня вещественны при всѣхъ вещественныхъ значеніяхъ  $a$  и  $m$ . Условіе возможности рѣшенія опредѣляется неравенствомъ

$$2a (a + \sqrt{a^2 + m^2}) \leq m^2;$$

рѣшая его, находимъ

$$3) \quad m \geq 2a \sqrt{2}.$$

Наконецъ, если  $m = 2a \sqrt{2}$ , то мы имѣемъ всего одно рѣшеніе; если  $m > 2a \sqrt{2}$  — два рѣшенія, симметричныя по отношенію другъ къ другу. Дѣйствительно, въ первомъ случаѣ прямая  $AB$  есть діагональ квадрата со стороною  $2a$ ; во второмъ случаѣ — діагональ прямоугольника. Называя черезъ  $A_1B_1$  второе положеніе искомой прямой, имѣемъ

$$A_1B_1 = AB, \quad A_1M = MB, \quad AM = MB_1;$$

$$OA + OB = OA_1 + OB_1, \quad OA = OB_1, \quad OB = OA_1,$$

слѣдовательно, точки  $A$  и  $B_1$ ,  $B$  и  $A_1$  симметричны по отношенію къ  $M$ .

**128. Задача Альгазена.** — На кругломъ бильярдѣ въ точкѣ  $P$  находится шаръ. Въ какомъ направленіи надо



$$\angle POA_3 = x + 4y,$$

$$\angle POA_4 = x + 6y,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\angle POA_n = x + 2(n-1)y.$$

Такъ какъ согласно предположенію  $\angle POA_1 = \angle A_n OP = x_1$ , то

$$\angle POA_1 A_2 \dots A_n P = 2x + 2(n-1)y.$$

Съ другой стороны это есть центральный уголъ, соотвѣтствующій замкнутой ломаной  $PA_1 A_2 \dots A_n P$ , слѣдовательно

$$(*) \quad 2x + 2(n-1)y = 2k\pi.$$

Теперь изъ треугольника  $POA_1$  находимъ  $\frac{OP}{OA_1} = \frac{\sin OA_1 P}{\sin OPA_1}$ . Но  $\angle OA_1 P = \angle A_1 OK = 90^\circ - y$ ;  $\angle OPA_1 = 180^\circ - (90^\circ - y) - x = 90^\circ - (x - y)$ , по-  
этому

$$\frac{OP}{OA_1} = \frac{\cos y}{\cos (x - y)}.$$

Наконецъ изъ (\*) находимъ

$$1) \quad x - y = k\pi - ny,$$

откуда  $\cos (x - y) = \cos ny$ . Обозначая величину отношенія  $\frac{OP}{OA_1}$  черезъ  $p$ , получимъ

$$2) \quad \frac{\cos y}{\cos ny} = p.$$

Опредѣливъ изъ (2) уголъ  $y$ , найдемъ изъ (1) уголъ  $x$ , т. е. опредѣлимъ искомое направленіе.

**Замѣчаніе.** Разстояніе  $OP$  должно быть больше нуля и меньше  $R$ , слѣдовательно,  $0 < p < 1$  и  $|p \cos ny| < 1$ , т. е. уравненіе (2) имѣетъ рѣшенія при всякомъ цѣломъ и положительномъ  $n$ .

Такъ при  $n=3$  и  $p=\frac{1}{2}$  шаръ опишетъ траекторію  $PA_1A_2P$  (чер. 31); это — периметръ правильного вписаннаго треугольника.

129. **Задача Паскаля** <sup>1)</sup>. — *Рѣшить треугольникъ по  $a$ ,  $A$  и  $n = \frac{b-c}{h_a}$ .*

Эта задача интересна по различнымъ деталямъ рѣшенія.

Прежде всего находимъ одно уравненіе между углами  $B$  и  $C$

$$1) \quad \frac{B+C}{2} = \frac{\pi-A}{2},$$

и намъ остается найти еще второе между тѣми же неизвѣстными.

Во I-хъ, по 2-й формулѣ Мольвейде

$$a) \quad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}.$$

Во II-хъ, по формулѣ высотъ (замѣняя  $2R$  равною ему величиною  $\frac{a}{\sin A}$ )

$$h_a = \frac{a \sin B \sin C}{\sin A},$$

---

<sup>1)</sup> Blaise Pascal (1623—1662), математикъ, физикъ и философъ.

откуда:

$$\beta) \quad \frac{h_a}{a} = \frac{\sin B \sin C}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}.$$

Раздѣливъ почленно (α) на (β), получимъ:

$$\frac{b-c}{h_a} = \frac{2 \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{A}{2}}{\sin B \sin C}.$$

Правую часть послѣдняго равенства можно упростить; замѣчая, что  $2 \sin B \sin C = \cos (B-C) - \cos (B+C)$ , имѣемъ:

$$\sin B \sin C = \frac{1}{2} \cos (B-C) + \frac{1}{2} \cos A = \frac{1}{2} \left[ 1 - 2 \sin^2 \frac{B-C}{2} + 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 \right] = \cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{B-C}{2}.$$

Итакъ мы получили уравненіе:

$$\frac{2 \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{B-C}{2}} = n.$$

Введемъ обозначеніе  $\sin \frac{B-C}{2} = y$ ; тогда у насъ получится квадратное уравненіе:

$$2) \quad ny^2 + \left( 2 \sin \frac{A}{2} \right) y - n \cos^2 \frac{A}{2} = 0.$$

Такъ какъ свободный членъ отрицателенъ, то оба корня уравненія (2) вещественны и противоположныхъ знаковъ; кромѣ того, отрицательный корень не можетъ быть принятъ въ расчетъ, такъ какъ

$\frac{B-C}{2} < 90^\circ$ , а, слѣдовательно,  $\sin \frac{B-C}{2}$  есть величина положительная.

Рѣшая это уравненіе, находимъ положительный корень:

$$y = \frac{\sin \frac{A}{2}}{n} \left[ \sqrt{1 + n^2 \cotang^2 \frac{A}{2}} - 1 \right].$$

Приведемъ выраженіе въ квадратныхъ скобкахъ къ логариэмируемому виду по методѣ вспомогательнаго угла. Для этого положимъ:

$$3) \quad n \cotang \frac{A}{2} = \tang \varphi,$$

тогда:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + n^2 \cotang^2 \frac{A}{2}} &= \sqrt{1 + \tang^2 \varphi} = \sqrt{\sec^2 \varphi} = \\ &= \sec \varphi; \end{aligned}$$

$$\sec \varphi - 1 = \frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi} = \frac{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}$$

и

$$4) \quad y = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{n \cos \varphi}.$$

Правую часть равенства (4) можно упростить, исключая  $n$ . Изъ (3) находимъ:  $n = \tang \varphi \tang \frac{A}{2}$ .

Далѣе:

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{A}{2}}{n \cos \varphi} &= \frac{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{A}{2}}{\cos \varphi} : \frac{\sin \varphi \sin \frac{A}{2}}{\cos \varphi \cos \frac{A}{2}} = \\ &= \frac{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \frac{A}{2}}{\sin \varphi} = \frac{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \frac{A}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} = \cos \frac{A}{2} \tang \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

Итакъ:

$$5) \quad y = \cos \frac{A}{2} \operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}.$$

Полагая  $y = m$ , находимъ:  $\frac{B-C}{2} = \operatorname{arcsin} m = \alpha$ .

Такимъ образомъ мы пришли къ системѣ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{B+C}{2} &= \frac{\pi-A}{2}, \\ \frac{B-C}{2} &= \alpha. \end{aligned} \right\}.$$

Рѣшая эту систему, находимъ:

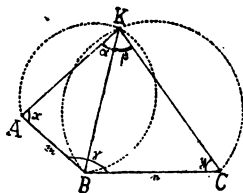
$$B = \frac{\pi-A}{2} + \alpha, \quad C = \frac{\pi-A}{2} - \alpha.$$

Зная углы и одну изъ сторонъ, мы найдемъ остальные стороны по формулѣ синусовъ.

**130. Задача Потенота.** Наблюдатель, находясь въ точкѣ  $K$  горизонтальной плоскости, видитъ 3 недоступныхъ точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , не лежащія на одной прямой, разстоянія между которыми извѣстны. Изъ точки  $K$  прямая  $AB$  и  $BC$  видны подъ углами  $\alpha$  и  $\beta$ . Определить положеніе наблюдателя.

Рѣшимъ эту задачу графически и аналитически, а затѣмъ изслѣдуемъ оба рѣшенія.

**Графическое рѣшеніе.** При помощи построенія задача эта рѣшается весьма просто. Для этого на прямыхъ  $AB$  и  $BC$  построимъ сегменты (чер. 326), вмѣщающіе углы  $\alpha$  и  $\beta$ ; тогда пересѣченіе дугъ этихъ сегментовъ опредѣлитъ искомую точку  $K$ .



Черт. 32.

**Аналитическое рѣшеніе.** Пусть  $A, B, C$  и  $K$  четыре точки, указанные въ задачѣ. Мы видимъ, что вопросъ сводится къ опредѣленію разстояній:  $KA, KB$  и  $КС$ . Введемъ обозначенія:  $AB = m, BC = n, \angle AKB = \alpha, \angle BKC = \beta, \angle ABC = \gamma, \angle KAB = x, \angle KCB = y$ . Треугольники  $AKB$  и  $BKC$  будутъ опредѣлены, если мы найдемъ углы  $x$  и  $y$  (углы  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  намъ извѣстны).

Такъ какъ сумма угловъ четырехугольника  $ABCK$  равна 4-мъ прямымъ, то:

$$x + y + (\alpha + \beta) + \gamma = 2\pi,$$

$$1) \quad \frac{x + y}{2} = \pi - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}.$$

Далѣе, опредѣляя общую сторону  $KB$  упомянутыхъ треугольниковъ по формулѣ синусовъ, получимъ:

$$KB = \frac{m \sin x}{\sin \alpha}; \quad KB = \frac{n \sin y}{\sin \beta},$$

откуда:

$$\begin{aligned} \frac{m \sin x}{\sin \alpha} &= \frac{n \sin y}{\sin \beta}, \\ 2) \quad \frac{\sin x}{\sin y} &= \frac{n \sin \alpha}{m \sin \beta}. \end{aligned}$$

Преобразуемъ второе уравненіе по методѣ вспомогательнаго угла. Для этого положимъ  $\frac{n \sin \alpha}{m \sin \beta} = \tan \varphi$ ; слѣдовательно:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\tan \varphi}{1}; \quad \frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\tan \varphi - 1}{\tan \varphi + 1};$$

раскладывая на множителей обѣ дроби, получимъ:

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{x-y}{2}}{\operatorname{tang} \frac{x+y}{2}} = \operatorname{tang} \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right).$$

Подставимъ теперь вмѣсто  $\frac{x+y}{2}$  его выраженіе изъ (1), тогда:

$$3) \quad \operatorname{tang} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tang} \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{tang} \left( \pi - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \right),$$

$$4) \quad \frac{x-y}{2} = \operatorname{arcTang} \left[ \operatorname{tang} \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{tang} \left( \pi - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \right) \right].$$

Называя черезъ  $\delta$  наименьшее значеніе правой части равенства 4, получимъ систему 2-хъ уравненій съ двумя неизвѣстными:

$$5) \quad \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \pi - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}, \\ \frac{x-y}{2} = \delta. \end{cases}$$

Рѣшая ее, находимъ:

$$x = \pi - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} + \delta,$$

$$y = \pi - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} - \delta.$$

Зная  $x$  и  $y$ , мы найдемъ по формулѣ синусовъ:  $KA$ ,  $KB$  и  $КС$ .

**Исслѣдованіе.** Если сумма угловъ  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  равна  $\pi$ , то  $x + y = \pi$ ; въ этомъ случаѣ четырехугольникъ  $ABCK$  можетъ быть вписанъ въ окружность. Тогда

обѣ хорды  $AB$  и  $BC$  явятся хордами одной окружности, сегменты, описанные на этихъ хордахъ, совпадутъ и точка  $K$  будетъ находиться въ любой точкѣ окружности, за исключеніемъ  $A$ ,  $B$  и  $C$ ; это показываетъ, что предложенный вопросъ при такихъ данныхъ становится неопредѣленнымъ.

Къ тому же заключенію приводитъ насъ и изслѣдованіе аналитическаго рѣшенія. Если  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , то:  $\pi - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$  и  $\text{tang } \frac{\pi}{2} = \infty$ , т. е. второй множитель правой части равенства (3) обращается въ безконечность. Далѣе мы имѣли:

$$\text{tang } \varphi = \frac{n \sin \alpha}{m \sin \beta} = \frac{\frac{n}{\sin \beta}}{\frac{m}{\sin \alpha}}.$$

Отношенія, стоящія въ числительѣ и знаменателѣ, по числовой величинѣ равны діаметрамъ одного и того же круга, описаннаго около четырехугольника  $ABCK$ ; поэтому послѣдняя дробь равна 1,  $\text{tang } \varphi = 1$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Слѣдовательно:

$$\text{tang} \left( \varphi - \frac{\pi}{4} \right) = \text{tang } 0 = 0.$$

Итакъ формула (3) принимаетъ видъ:

$$\text{tang } \frac{x-y}{2} = 0 \times \infty,$$

т. е. принимаетъ видъ неопредѣленности.

**Замѣчаніе.** Задача Потенота извѣстна также подъ названіемъ «проблема карты». Впервые ею занимался Шиккардъ; затѣмъ въ 1614 г. первое рѣшеніе



*a*. Примѣняя поэтому къ четырехугольнику *BCDE* теорему Птоломея, получимъ

$$ED \cdot a = h_b h_c - BE \cdot DC.$$

Далѣе  $h_b = a \cdot \sin C$ ,  $h_c = a \cdot \sin B$ , поэтому

$$ED = a (\sin B \sin C - \cos B \cos C),$$

$$ED = a [-\cos (B - C)],$$

$$(*) \quad ED = a \cos A.$$

Слѣдовательно

$$BE + ED + DC = a (\cos A + \cos B + \cos C),$$

$$1) \quad \cos A + \cos B + \cos C = m.$$

Такимъ образомъ мы пришли къ системѣ

$$2) \quad \begin{cases} A + B - C = 180^\circ, \\ \cos \frac{B - C}{2} = \frac{4}{5}, \\ \cos A + \cos B + \cos C = m. \end{cases}$$

Система эта рѣшается просто. Такъ какъ  $\cos A = -\cos (B + C)$ , то третье уравненіе системы принимаетъ видъ

$$\cos B + \cos C - \cos (B + C) = m.$$

Рѣшая его, находимъ

$$2 \cos \frac{B + C}{2} \cos \frac{B - C}{2} - \cos (B + C) = m,$$

$$\frac{8}{5} \cos \frac{B + C}{2} - 2 \cos^2 \frac{B + C}{2} + (1 - m) = 0,$$

$$10 \cos^2 \frac{B + C}{2} - 8 \cos \frac{B + C}{2} - 5(1 - m) = 0,$$

$$3) \quad \cos \frac{B + C}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{66 - 50m}}{10}.$$

**Исслѣдованіе.** По условію задачи всѣ три угла острые, слѣдовательно,  $B + C > 90^\circ$  и

$$\frac{B + C}{2} > 45^\circ.$$

Съ другой стороны намъ дано, что  $\frac{B - C}{2} = \arccos \frac{4}{5}$ , значитъ, уголъ  $\frac{B - C}{2}$  есть меньшій уголъ Египетскаго треугольника

$$\frac{B - C}{2} = 36^\circ 52' 14''.$$

Такъ какъ  $\frac{B + C}{2} + \frac{B - C}{2} = B$ , а  $B < 90^\circ$ , то окончательно

$$\frac{B + C}{2} < 53^\circ 7' 46''.$$

Итакъ мы нашли предѣлы для искомой полусуммы угловъ  $B$  и  $C$

$$4) \quad 45^\circ < \frac{B + C}{2} < 53^\circ 7' 46''.$$

Зная, что  $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7$  (прибл.) и  $\cos 53^\circ 7' 46'' = 0,6$ , нетрудно составить неравенства и для  $\cos \frac{B + C}{2}$

$$0,6 < \cos \frac{B + C}{2} < 0,7.$$

Отсюда для опредѣленія  $m$  находимъ

$$0,6 < \frac{4 \pm \sqrt{66 - 50m}}{10} < 0,7$$

$$6 < (4 + \sqrt{66 - 50m}) < 7.$$

Знакъ «минусъ» нужно отбросить, такъ какъ выраженіе въ скобкахъ должно быть больше 6. Далѣе

$$5) \quad 1,14 < m < 1,24.$$

Полученный результат показываетъ, что  $m$  можетъ имѣть различныя дробныя значенія, но ни одного цѣлаго; эти значенія должны заключаться между 1,14 и 1,24, слѣдовательно, значеніе  $m=1,2$ , данное въ задачѣ, возможно..

**Вычисленіе.** Подставляя въ формулу

$$\cos \frac{B+C}{2} = \frac{4 + \sqrt{66 - 50m}}{10}$$

вмѣсто  $m$  его значеніе  $\frac{6}{5}$ , находимъ

$$\cos \frac{B+C}{2} = \frac{4 + \sqrt{6}}{10},$$

$$\cos \frac{B+C}{2} = 0,64495,$$

$$\lg \cos \frac{B+C}{2} = 9,80953 - 10,$$

$$\frac{B+C}{2} = 49^\circ 50' 16'',$$

что позволяетъ намъ вычислить всѣ три угла, а именно

$$A = 80^\circ 19' 28'',$$

$$B = 86^\circ 42' 30'',$$

$$C = 12^\circ 58' 2''.$$

Всѣ три угла острые, слѣдовательно, удовлетворяютъ условію заданія.

### Примѣры и задачи.

I. Рѣшить уравненія:

$$31) 2 \cos x = \sec x.$$

$$32) \sin x = \sec x.$$

$$33) \cos^2 x - \cos x - 6 = 0.$$

- 34)  $2 \sec^2 x - 7 \sec x + 3 = 0.$
- 35)  $4 \sin^2 x - 2(1 + \sqrt{3}) \sin x + \sqrt{3} = 0.$
- 36)  $3 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 2,75.$
- 37)  $\sin 3\alpha = 2 \sin \alpha.$
- 38)  $\sin 2x = 3 \cos 3x.$
- 39)  $\sin 3x = 8 \sin^3 x.$
- 40)  $\operatorname{ctg}^2 x - \sec^2 x = \frac{1}{4}.$
- 41)  $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x = 5.$
- 42)  $\cos x = 2 \sin \frac{x}{2}.$
- 43)  $\cos x + \cos 2x = 1.$
- 44)  $2 \sin x \sin 3x = 1.$
- 45)  $3 \operatorname{tg}^2 x - 16 \sin^2 x + 3 = 0.$
- 46)  $\frac{\cos x - \sqrt{5}}{\cos x} = \frac{\cos x - 10}{\cos x + \sqrt{5}}.$
- 47)  $2 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3.$
- 48)  $\sin (x + 45^\circ) + \sin (x + 75^\circ) = \sin 82^\circ.$
- 49)  $\sec (45^\circ + x) \sec (45^\circ - x) = 4.$
- 50)  $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x.$
- 51)  $\sin x + \cos 3x = 0.$
- 52)  $3 \sin x = 7 \sin (\varphi - x).$
- 53)  $\sin x + \sin y = \sin (x + y).$
- 54)  $\sin (13x - 270^\circ) = \sin (13x + 60^\circ).$
- 55)  $\cos \pi x = \cos n\pi x.$
- 56)  $\operatorname{tg} \frac{3}{5} x \cdot \operatorname{ctg} \frac{5}{3} x = 1.$
- 57)  $\operatorname{tg} \frac{x + \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x - \frac{\pi}{4}}{x + \pi} = 1.$
- 58)  $\sin (x + 20^\circ) + \sin x = \cos 10^\circ.$
- 59)  $\operatorname{tg} 3x = \sin 6x.$
- 60)  $3 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x + 1 = 0.$

$$61) \sin \frac{n+1}{2} x + \sin \frac{n-1}{2} x = \sin x.$$

$$62) \operatorname{tg} (x+a) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x - \frac{1}{3}}.$$

$$63) 2 \cos \frac{x}{3} - \sin \frac{x}{2} = 2.$$

$$64) \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x.$$

$$65) \sqrt{3} \cos x - \sin x = 1.$$

$$66) \sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}.$$

$$67) a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x = c.$$

$$68) a \sin 2x + b (\sin x + \cos x) = 0.$$

$$69) \sin^2 x + 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = m.$$

$$70) a (\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = c.$$

$$71) \sin (\pi \cos x) = \cos (\pi \sin x).$$

$$72) \operatorname{tg} x + ab \operatorname{ctg} x = a + b.$$

$$73) a \operatorname{tg}^2 x + b = c \sec^2 x.$$

$$74) \operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} [\operatorname{arcsin} (\cos 60^\circ)].$$

$$75) \sin (43^\circ + x) \cos (47^\circ - x) = \frac{3}{4}.$$

$$76) a \sin (x+m) \sin (x+n) = b.$$

$$77) a \sin (A-x) = b \cos x.$$

$$78) \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + x \right) = m.$$

$$79) \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} 2x = \sin x \left( 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} x \right).$$

$$80) \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = m^3 - 3m.$$

$$81) \sin (\pi + x^2) - \cos (2x - 3) = 0.$$

$$82) \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{2}{3}.$$

$$83) 3^{1 + \sin x} = 4.$$

$$84) 5^{1 + \operatorname{tg} x} = 125.$$

$$85) 16^{\sin x} + 3 \cdot 4^{\sin x} = 10.$$

$$86) 1,2^{\cos^2 x + \cos x} = \left( \frac{6}{5} \right)^{0,75}.$$

$$87) 0,4^1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \dots = 0,3.$$

$$88) \operatorname{tg} x^{\operatorname{tg} x^{\operatorname{tg} x^{\dots}}} = \sin 10^\circ.$$

$$89) \operatorname{arcTg} 1 = 2 \operatorname{arcTg} x.$$

$$90) \operatorname{arcCtg} x + \operatorname{arcCtg} 2x = \frac{3\pi}{4}.$$

$$91) \operatorname{arcTg} \frac{1}{a+1} = 2 \operatorname{arcTg} a.$$

$$92) \operatorname{arcTg} 2x + \operatorname{arcTg} 3x = \frac{3\pi}{4}.$$

$$93) \operatorname{arcTg} \frac{x}{9} + \operatorname{arcTg} \frac{x}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

$$94) \operatorname{arcTg} \frac{1}{x-1} - \operatorname{arcTg} \frac{1}{x+1} = \operatorname{arcTg} \frac{1}{8}.$$

$$95) 3 \operatorname{arcTg} \frac{1}{2+\sqrt{3}} - \operatorname{arcTg} \frac{1}{x} = \operatorname{arcTg} \frac{1}{3}.$$

$$96) \operatorname{arcSin} x + \operatorname{arcSin} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$97) \operatorname{arcSin} x - \operatorname{arcCos} x = \operatorname{arcSin} (3x - 2).$$

$$98) \operatorname{Tg} (\operatorname{ctg} x) = 1.$$

$$99) \operatorname{Tg} (4 \operatorname{arcTg} x) = x.$$

$$100) \sin (\operatorname{arcCos} 2x) = -\cos (\operatorname{arcCos} x).$$

II. Решить системы уравнений:

$$101) x + y = \frac{\pi}{2}; \sin x \cos y = 0,75.$$

$$102) x + y = \frac{\pi}{2}; 6 \operatorname{tg} x = 5 \operatorname{tg} y.$$

$$103) x + y = \frac{\pi}{2}; \sin x + \cos y = \operatorname{tg} x.$$

$$104) x + y = \frac{\pi}{6}; \sin x = 3 \sin y.$$

$$105) \sin x = \cos 2y; \sin 2x = \cos y.$$

$$106) x + y = \alpha; \sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos \alpha.$$

$$107) \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = -\frac{4}{\sqrt{3}}; \sin 2x - \sin 2y = -\sqrt{3}.$$

$$108) \cos x \cos y = \frac{-1}{2}; \sin x + \cos y = 0.$$

$$109) \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1; \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$110) 2(\sin 2x + \sin 2y) = 2 \sin(x + y) = 1.$$

$$111) \sin y = k \sin x; 2 \cos x + \cos y = 1.$$

$$112) \sin x + \sin y = \sin \theta; \cos x + \cos y = \cos \theta.$$

$$113) x + 2y = \frac{\pi}{2}; 3 \operatorname{tg} x + 12 \operatorname{tg} y = 5 \sqrt{3}.$$

$$114) \operatorname{tg} x = a \operatorname{ctg} y; \operatorname{tg} 2x = b \operatorname{ctg} 2y.$$

$$115) \sin x \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} b; \cos y \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} a.$$

III. Задачи на составление и исследование уравнений.

116) Въ треугольникѣ  $ABC$  уголъ  $B$  вдвое больше угла  $C$ , а отношеніе сторонъ  $b$  и  $a$  равно  $\sqrt{2}$ . Найти уголъ  $C$ .

117) Равнобокая трапеція вращается около меньшаго основанія; высота  $h$  трапеціи равна этому основанію. Найти уголъ между боковой стороной и большимъ основаніемъ, если извѣстно, что объемъ полученнаго тѣла вращенія  $V = 13 \pi h^3$  куб. см.

118) Треугольникъ  $ABC$  вращается около стороны  $c$ ; объемъ полученнаго тѣла  $V = 356,134$  куб. см. Зная, что высота  $h_c = 4,5$  см.,  $\alpha = \angle(a, h_c) = 58^\circ 14' 0'', 6$ , найти  $x = \angle(b, h_c)$ .

119) Дерево и башня находятся на разстояніи  $d = 15$  м. Если наблюдать башню и дерево, помѣщаясь по очереди у ихъ основаній, то угловая высота башни вдвое больше угловой высоты дерева. Если же помѣститься посрединѣ между ними, то ихъ угловыя высоты взаимно - дополнительные. Найти высоту башни и дерева.

120) Полуокругъ діаметра  $AB$  вращается около

радіуса  $OE$ , перпендикулярнаго къ  $AB$ . Опреѣлить положеніе точки  $C$  окружности, если извѣстно, что боковая поверхность тѣла, полученнаго отъ вращенія дуги  $BC$ , равна площади верхняго основанія тѣла.

121) Въ стеклянный круглый дискъ, лежащій горизонтально, входитъ тоже горизонтально свѣтовой лучъ; въ дискѣ онъ отражается и выходитъ по направленію, параллельному съ первоначальнымъ. Найти уголъ входа.

122) На продолженіи діаметра  $BOC$  взята точка  $S$  и изъ нея проведена касательная  $SA$ ; опустивъ перпендикуляръ  $AP$  и соединивъ  $A$  съ  $O$ , назовемъ уголъ  $SOA$  черезъ  $x$ . Найти величину этого угла, если извѣстно, что при вращеніи всей фигуры около діаметра  $BC$  боковая поверхность конуса  $SAP$  относится къ поверхности слоя  $AC$ , какъ  $m:n$ . Вычислить  $x$  при  $m=3$ ,  $n=2$ .

123) Отношеніе полныхъ поверхностей конусовъ, полученныхъ отъ вращенія прямоугольнаго треугольника сначала около  $a$ , а затѣмъ около  $b$ , равно 2. Найти уголъ  $A$ .

124) Найти центральный уголъ круговаго сектора при  $R=5$  м., если полная поверхность тѣла, полученнаго отъ вращенія сектора около одного изъ крайнихъ радіусовъ, равна  $S=94,4373$  кв. м.

125) Въ шаръ вписанъ прямой конусъ; его образующая составляетъ съ діаметромъ, проходящимъ черезъ вершину конуса, острый уголъ  $\phi$ . Найти  $\phi$  при условіи, что отношеніе объемовъ конуса и шароваго сегмента, имѣющаго съ конусомъ основаніе и высоту общими, равно  $\frac{5}{9}$ .

126) Найти  $\alpha$ , удовлетворяющее уравненію

$$\cos 2x - 2 \cos x = \alpha.$$

Каково должно быть  $\alpha$ , чтобы корни уравненія равнялись 0 и  $\frac{\pi}{2}$ ?

127) Изъ вершины  $A$  параболы опущенъ перпендикуляръ  $AB=h$  на директриссу; изъ  $B$  проведена касательная  $BM=d$  подъ угломъ  $\alpha$  съ  $h$ . Найти  $\alpha$  и вычислить при  $\frac{d}{h}=2\sqrt{2}$ . (Sorbonne).

128) Въ треугольникѣ  $ABC$  высота  $h_a=1$  м.,  $A=\frac{\pi}{4}$  и  $\operatorname{tg} B=2 \operatorname{tg} C$ . Вычислить стороны и углы. (Басс., Bordeaux).

129) Въ квадрантъ  $AOB$  вписанъ прямоугольникъ  $OPMQ$ , причемъ  $P$  лежитъ на  $OA$ ,  $Q$  лежитъ на  $OB$ . Полагая  $R=1$ , найти  $x=\angle POM$ , если отношеніе периметра треугольника къ его площади равно  $n$ .—Вычислить  $x$  при  $n=4\sqrt{2}$ ,  $n=4\sqrt{6}$ . (Вассалаурэат).

130) Дано уравненіе  $\operatorname{tg}^3 \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \alpha$ . Определить  $\alpha$  такъ, чтобы  $x=\frac{\pi}{4}$  было однимъ изъ рѣшеній; вычислить  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$ . (Institut Agronomique).

131) Въ прямоугольномъ треугольникѣ  $c=1$  и  $a+b+h_c=n$ . Определить углы и вычислить при  $n=\frac{3}{2}$ . (Басс., Paris).

132) Радиусъ  $OM$  въ точкахъ  $A$  и  $B$  раздѣленъ на три равныя части; изъ  $A$  и  $B$  возставлены перпендикуляры по одну сторону радиуса до пересѣченія съ окружностью въ точкахъ  $E$  и  $F$ . Требуется составить уравненіе дуги  $EF$  и вычислить ее.

133) Двѣ наклонныя плоскости приставлены одна къ другой; уголъ при общей вершинѣ равенъ  $110^\circ$ . На плоскостяхъ находятся въ равновѣсіи два груза въ 38 кгр. и 63 кгр., соединенные нитью; нить перекинута черезъ блокъ, укрѣпленный въ вершинѣ плоскостей и идетъ параллельно плоскостямъ. Вычислить углы наклона плоскостей.

134) Вершины правильного треугольника лежатъ на трехъ параллельныхъ прямыхъ; разстоянія средней параллели отъ крайнихъ равны  $a$  и  $b$ . Найти сторону треугольника и вычислить ее при  $a = b = 5$  м.

135) Уголъ  $A$  треугольника втрое больше угла  $B$ ; кромѣ того даны  $r$  и  $h_c$ . Найти уголъ  $B$  и изслѣдовать рѣшеніе. Вычислить углы при  $r = 1$ ,  $h_c = 1 + \sqrt{3}$ .

136) Башня надъ замкомъ имѣетъ высоту  $a = 5,5$  мет. и видна подъ угломъ  $\alpha = 20^\circ 31'$  изъ точки, находящейся на разстояніи  $d = 2,75$  метр. отъ основанія замка и на высотѣ  $h = 6,38417$  мет. Какова высота замка?

137) Въ треугольникѣ даны  $A$ ,  $a$  и  $b - c + h_a = m$ . Найти  $B$  и  $C$  и вычислить при  $A = 60^\circ$ ,  $a = 8\sqrt{3}$ ,  $n = 15$ . (Pierre de Fermat, 1601—1665).

138) Въ треугольникѣ даны  $B = 2C$  и  $\frac{h_a}{r_c} = n$ . Найти углы и вычислить ихъ при  $n = \frac{33}{24}$ .

139) Въ равнобедренномъ треугольникѣ  $ABC$  дано основаніе  $a$  и биссектрисса  $\beta_B$ . Найти  $\frac{B}{2}$ , изслѣдовать формулу и привести ее къ логарифмируемому виду. (Saint-Cyr).

140) Черезъ 2 точки  $A$  и  $B$ , положеніе которыхъ на окружности извѣстно, проведены хорды  $AC$  и

*BC*. Зная, что отношеніе хорды равно  $m$ , опредѣлить положеніе точки  $C$ . — Приложить формулу въ случаѣ  $m = \frac{1}{3}$  и  $ACB = \frac{\pi}{2}$ .

141) Уголъ при вершинѣ равнобедреннаго треугольника  $A = 60^\circ$ ; каждая изъ боковыхъ сторонъ равна 2 мет. Какъ надо провести изъ  $A$  прямую внутри треугольника, чтобы сумма квадратовъ перпендикуляровъ, опущенныхъ на нее изъ  $B$  и  $C$ , равнялась  $m^2$ ? — Опредѣлить прямую при  $m^2 = 2$ . (Sorbonne).

142) Въ параллелограммѣ съ угломъ въ  $45^\circ$  и отношеніемъ сторонъ, равнымъ  $\sqrt{2}$ , вписанъ квадратъ. Опредѣлить положеніе его вершинъ.

143) Въ треугольникѣ углы составляютъ арифметическую прогрессию, также какъ и косососес  $2A$ , косососес  $2B$ , косососес  $2C$ . Показать, что косинусъ общей разности угловъ равенъ  $\sqrt{\frac{3}{8}}$ .

144) Ромбъ  $ABCD$  составленъ изъ двухъ равно-стороннихъ треугольниковъ  $ABC$  и  $BCD$ . Черезъ  $D$  проходитъ подвижная прямая; въ одномъ изъ своихъ положеній она пересѣкаетъ продолженныя стороны ромба  $AC$  и  $AB$  въ точкахъ  $E$  и  $F$ . Прямая  $BE$  и  $CF$  пересѣкутся тогда въ точкѣ  $M$ . Найти геометрическое мѣсто этой точки. (Cours général).

145) Три равноудаленныя другъ отъ друга точки  $B$ ,  $O$  и  $C$  расположены на одной прямой. Опредѣлить положеніе точки  $A$ , изъ которой отрезокъ  $BC$  видѣнъ подъ прямымъ угломъ, если известны  $m_a$  и  $\beta_A$ . — Положить въ формулѣ  $m_a = \sqrt{3} \beta_A$ .

146) Всомый однородный треугольникъ  $ABC$  поставленъ на горизонтальную плоскость вершиною  $A$ . Зная  $b$ ,  $c$  и  $A$ , найти части послѣдняго угла, на

которыя дѣлитъ его отвѣсная линія въ  $A$ , когда треугольникъ находится въ равновѣсїи. (Басс., Lille).

147) Въ треугольникѣ  $ABC$  данъ уголъ  $A$ ; кромѣ того, разстояніе отъ центра  $O$  вписаннаго круга до  $A$  есть средняя пропорціональная между  $OB$  и  $OC$ . Найти  $B$  и  $C$ . — Определить maximum  $A$ . (Басс., Grenoble, 1906).

148) Стороны треугольника составляютъ арифметическую прогрессию; уголъ  $A$  лежитъ противъ средней изъ нихъ. Найти  $B$  и  $C$ , maximum  $A$  и вычислить углы при  $A = 45^\circ$ . (Басс., Chambery, 1907).

149) Отрѣзки  $u$  и  $v$  биссектриссы  $\beta_c$  извѣстны; кромѣ того дано  $a^2 + b^2 = q^2$ . Найти уголъ  $C$  и изслѣдовать рѣшеніе. — Вычислить  $C$  при  $u = 3$ ,  $v = 4$ ,  $q = 10$ . — (Ecole Centrale des Arts et Manufactures, 1907).

150) Въ треугольникѣ данъ уголъ  $A$  и отношеніе  $m$  полупериметра къ радіусу вписаннаго круга. Найти  $B$  и  $C$ . — Вычислить  $B$  и  $C$ , полагая  $A = 60^\circ$  и  $m = 3 + 2\sqrt{3}$ . (Басс., Grenoble, 1907).

## Отвѣты и рѣшенія

### къ части II-ой.

#### Къ главѣ I-ой (стр. 103).

1)  $0,3022523$ . 2)  $0,6807060$ . 3)  $2,7381329$ . 4)  $3,4906583$ . 5)  $9$ . 6)  $20^\circ 3' 12'',66$ . 7)  $12^\circ 43' 56'',62$ . 8)  $84^\circ 36' 58'',04$ . 9)  $30^\circ 34' 38'',95$ . 10)  $107^\circ 17' 45'',1$ .

#### Къ главѣ II-ой (стр. 124).

1) Такъ какъ  $\pi = \frac{22}{7}$ , то  $22 = 7\pi$ ,  $\sin 22 = \sin 7\pi = \sin(3.2\pi + \pi) = \sin \pi = 0$ ;  $\cos 11 = 0$ ;  $\operatorname{tg} 41 = 0$ . 2)  $-\frac{\operatorname{ctg}^2 22^\circ}{\operatorname{tg} 41^\circ \sin 49^\circ}$ ;  $\frac{\sin 27^\circ \operatorname{ctg} 13^\circ}{\sec 42^\circ \sin 20^\circ}$ ;  $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ . 3)  $-1$ .

- 4)  $\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$ . 5) — 2. 6)  $-\frac{a^2 + ab + 2b^2}{(a+b)b}$ . 7) 1. 8)  $ab$ . 9)  $-2\sqrt{2}$ .  
10)  $5\sqrt{3}$ . 11)  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ . 12) 0.

**Къ главѣ III-ей (стр. 158).**

- 4)  $x = 75^\circ$ . 6)  $2 \lg 2 \alpha$ ; 1;  $\operatorname{ctg} \alpha$ .

**Къ главѣ IV-ой (стр. 183).**

1) 23 30 R (эзменныхъ раді; совъ). 2 109,9 R. 3 Почти 60 R. 4) 107,47 дм. или почти 1 с. 2 ф. 5)  $\lg x = \frac{1}{502}$ ,  $x = 6' 50''$ , 85. 6) Длина въ 10313,1 разъ больше ширины. 7) 72,8 саж. 8)  $42' 5''$ , 2. 9) Большая —  $89^\circ 16' 53''$ , 37; меньшая —  $87^\circ 11' 33''$ , 25. 10) 7.91 мет. (гора Чимборазо).

**Къ главѣ V-ой (стр. 210).**

- 1)  $\sin 70^\circ$ . 2)  $-\sqrt{3} \sin 29^\circ$ . 3)  $\sqrt{2} \cos 20^\circ$ . 4)  $2 \sin \left(45^\circ - \frac{b}{2}\right) \sin \left(a - \frac{b}{2} - 15^\circ\right)$ .  
5)  $2 \lg x \cos^2 \frac{x}{2}$ . 6)  $\frac{2 \sin^2 \frac{A}{2}}{\cos A}$ . 7)  $-2 \lg A \sin^2 \frac{A}{2}$ . 8)  $\frac{1}{2} \lg A$ . 9)  $2\sqrt{2} \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)$ . 10)  $2\sqrt{2} \cos \frac{A}{2} \sin \left(45^\circ - \frac{A}{2}\right)$ . 11)  $\operatorname{ctg} \left(45^\circ - m\right)$ .  
12)  $\frac{\cos \left(30^\circ + \frac{A}{2}\right) \cos \left(30^\circ - \frac{A}{2}\right)}{\sin \left(15^\circ + \frac{A}{2}\right) \cos \left(15^\circ - \frac{A}{2}\right)}$ . 13)  $\operatorname{ctg}^2 \frac{A}{2}$ . 14)  $\lg \frac{x}{2}$ ;  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ .  
15)  $-\sqrt{2} \sin A \sec (45^\circ + A)$ . 16)  $2 \cos^2 (45^\circ + x)$ . 17)  $4 \sin (A + 30^\circ) \cdot \sin (A - 30^\circ)$ . 18)  $2 \sin (60^\circ \pm a)$ . 19)  $-2 \sin 51^\circ \sin 21^\circ$ . 20)  $2 \cos (60^\circ + x)$ .  
21)  $2 \sin A \sin B \cos (A + B)$ . 22)  $4 \cos 13^\circ \sin 12^\circ$ . 23)  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ . 24)  $-\operatorname{cosec} 43^\circ$ .  
25)  $-\lg x \lg 2 x \lg 3 x$ . 27)  $8 \cos 8 \alpha \cos^2 \alpha$ . 23)  $\operatorname{ctg} \frac{A}{3}$ .  
29)  $8 \cos \left(90^\circ + \frac{x}{2}\right) \sin \left(90^\circ - \frac{x}{2}\right)$ . 30)  $-\frac{1}{2} \sec x \lg x$ . 31)  $4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ .  
32)  $-4 \cos (45^\circ - A) \cos (45^\circ - B) \cos C$ . 33)  $4 \sin \left(45^\circ - \frac{A}{4}\right) \sin \left(45^\circ - \frac{B}{4}\right) \cos \left(45^\circ - \frac{C}{4}\right)$ . 34)  $2 \sin A \sin C \cos B$ . 35)  $\lg A \lg B \lg C$  [можно воспольз. формулой для  $\lg (A + B + C)$ ]. 36)  $\lg 2 A \lg 2 B \lg 2 C$ . 37)  $\lg 100 A \lg 100 B \cdot \lg 100 C$ . 38)  $\lg A \operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C$ . 39)  $-2 \cos A \cos B \cos C$ . 40)  $\sin^2 C$ .  
54)  $N \sec \varphi \sin (A + \varphi)$ . 46) 2,90197. 47) 0,7937. 43) 0,5711. 51)  $\frac{1}{2}$ . 52)  $\frac{a^2}{b^2}$ .  
53) 2. 54)  $\cos \alpha$ . 55)  $-\sin \alpha$ . 56)  $\cos \alpha$ . 57)  $-\frac{1}{2}$ . 58) 0. 50)  $\frac{1}{2}$ . 60)  $\frac{1}{2}$ .  
61) — 3. 62) — 1. (3)  $2\sqrt{2}$ . 64)  $\frac{1}{4}$ . 65)  $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ . 63) 0. 67)  $\frac{1}{2}$ . 68) 1. 69)  $\infty$ .  
70)  $\sin 2\alpha$ .

Къ главѣ VI-ой (стр. 224).

- 1)  $\frac{\pi}{6}$ . 2)  $\frac{\pi}{6}$ . 3)  $116^{\circ} 33' 54''$ . 4)  $27^{\circ} 16'$ . 5)  $131^{\circ} 48' 39''$ . 6) — а. 7)  $60^{\circ}$ .

Стр. 230.

- 1)  $\frac{\pi}{2}$ . 2)  $\frac{\pi}{4}$ . 3) Невозм. 4)  $\arcsin \frac{11}{16}$ . 5)  $\frac{3\pi}{4}$ . 6)  $\pi$  или 0. 7)  $\arccos \frac{119}{120}$ .  
8)  $\arccos \frac{\sqrt{3}+1}{4} = \frac{\pi}{12}$ . 9)  $\frac{\pi}{4}$ . 10)  $\frac{\pi}{4}$ . 11)  $\frac{\pi}{4}$ . 12)  $-\frac{24}{7}$ .

Къ главѣ VII-ой (стр. 238).

- 1) Черезъ  $\lg x$ ;  $x_1 = k\pi$ ,  $x_2 = (4k+3)\frac{\pi}{4}$ . 2) Черезъ  $\lg \frac{x}{2}$ . 3) Черезъ  $\cos x$ ;  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ . 4) Черезъ  $\lg x$ ;  $x_1 = 20^{\circ} 54' 18''$ ,  $x_2 = 69^{\circ} 5' 42''$ .  
5) Возвратное ур. 4-ой ст. относ.  $\lg \frac{x}{2}$ ;  $x_1 = k\pi$ ,  $x_2 = (k+3)\frac{\pi}{4}$ . 6) Черезъ  $\lg x$ ;  $x_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $\lg x_2 = -\frac{3}{5}$ ,  $\pi - x_2$  — меньшій уголъ Египетскаго тр-ка).  
7) Черезъ  $\lg x$ ;  $x_1 = k\pi + \arctg \frac{15}{7}$ ;  $x_2 = (4k+3)\frac{\pi}{4}$ . 8)  $\ctg x = 2\sqrt{2} + 1$ .  
9)  $3 - \lg^2 x = \frac{2}{\lg x}$ ;  $x_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $x_2 = \arctg(-2)$ . 10) Черезъ  $\lg x$ ;  $x_1 = k\pi$ ,  $x_2 = k\pi + \arctg \frac{15}{7}$ .

Стр. 241.

- 11)  $x_1 = \frac{\pi}{8}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{9}$ . 12)  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{2\pi}{3}$ ,  $x_3 = \frac{\pi}{6}$ . 13)  $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $x_2 = \frac{2\pi}{3}$ ,  $x_3 = \pi$ . 14)  $x_1 = a$ ,  $x_2 = 0$ . 15)  $x_1 = \frac{\pi}{6}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{4}$ ,  $x_3 = -\frac{\pi}{4}$ . 16)  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{12}$ . 17)  $x = \frac{\pi}{12}$ . 18)  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{12}$ . 19)  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ . 20)  $(1 + \cos 2x) \cdot (1 - 2 \sin 4x) = 0$ ;  $x_1 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{24}$ .

Стр. 245.

- 21)  $x = \pm \frac{\pi - 2x}{10}$ . 22)  $90^{\circ} - 5x = 000^{\circ}$ ;  $x = -2^{\circ}$ . 23)  $x_1 = \frac{\pi - 2h}{6}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{2} + h$ . 24)  $\cos x = \sin 2x$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{6}$ . 25)  $-\left(\frac{3}{2}x + 45^{\circ}\right) = \frac{2}{3}x + 45^{\circ}$ ;  $x_1 = -\frac{3\pi}{15}$ . 26)  $x = -\frac{\pi}{12}$ . 27)  $x = 0$ . 28)  $x = \frac{\pi}{3}$ . 29)  $x_1 = \frac{\pi}{12}$ ,  $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ . 30)  $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ .

Стр. 271.

- 31)  $x_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ . 32)  $\sin 2x = 2$ , невозм. 33) Невозм. 34)  $\sec x = 3$ . 35)  $x_1 = 30^{\circ}$ ,  $x_2 = 60^{\circ}$ . 36)  $x_1 = 30^{\circ}$ ,  $x_2 = 210^{\circ}$ . 37)  $\alpha_1 = 30^{\circ}$ ,  $\alpha_2 = 210^{\circ}$ . 38)  $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{12}$ . 39)  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \pm \frac{\pi}{6}$ . 40)  $\lg x =$

$$\begin{aligned}
 &= \pm \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{89}}{8}}. \quad 41) x_1 = 135^\circ, \operatorname{tg} x_2 = 5. \quad 42) \sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\
 43) \cos x &= \frac{\sqrt{17}-1}{4}. \quad 44) x_1 = 2k\pi, x_2 = (6k \pm 1) \frac{\pi}{3}. \quad 45) x_1 = 30^\circ, x_2 = 120^\circ. \\
 46) x &= 2\pi \pm \frac{\pi}{3}. \quad 47) x = 60^\circ. \quad 48) x = -29^\circ 9' 46''. \quad 49) \cos 2x = \frac{1}{2}. \\
 50) x &= 2\pi \pm \frac{\pi}{4}. \quad 51) x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = -\frac{\pi}{8}. \quad 52) x = \frac{\pi}{2} + \operatorname{ArcCtg} \left( 2,5 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \right). \\
 53) x &= y = 0. \quad 54) x = 150^\circ. \quad 55) x = \frac{2k}{n \pm 1}. \quad 56) \pi + \frac{3}{5}x = \frac{5}{3}x, x = \frac{15}{16}\pi. \\
 57) x &= -\frac{\pi}{6}. \quad 58) x_1 = 20^\circ, x_2 = 140^\circ. \quad 59) x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{12}, x_3 = \frac{7\pi}{12}. \\
 60) \cos x &= \pm \frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}. \quad 61) x_1 = (2k+1)\pi, x_2 = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{n+1}. \\
 62) \frac{\sin(a+x)}{\sin(x-a)} &= 3, \operatorname{ctg} x = 2 \operatorname{ctg} a. \quad 63) 4 \sin \frac{x}{6} \left( \sin^2 \frac{x}{6} - \sin \frac{x}{6} - 3 \right) = 1; \\
 x_1 &= 0^\circ, x_2 = 1260^\circ. \quad 64) x_1 = 135^\circ, \sin x_2 = 2(\sqrt{2}-1). \quad 65) x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{3\pi}{2}. \\
 66) x_1 &= 2k\pi - \frac{7\pi}{12}, x_2 = 2k\pi + \frac{11\pi}{12}. \quad 67) c \sin 2x + (a-b) \cos 2x = a+b. \\
 68) \text{Возмож. при } \frac{a^2}{b^2} &\geq 2. \quad 69) 2 \sin 2x - 3 \cos 2x = 2m+1. \quad 70) 2b \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - x \right) + \\
 &+ 2a \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - x \right) - (c+d) = 0. \quad 71) \sin 2x = \pm \frac{3}{4}. \quad 72) \operatorname{tg} x_1 = a, \\
 \operatorname{tg} x_2 &= b. \quad 73) \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{c-b}{a-c}}. \quad 74) x = \frac{\pi}{6}. \quad 75) x_1 = 17^\circ, x_2 = 77^\circ. \\
 76) \cos(m+n+2x) &= \cos(m-n) - \frac{2b}{a}. \quad 77) \operatorname{tg} x = \frac{(a-1) \operatorname{tg} m - (a+b) \operatorname{ctg} m}{2a}, \\
 \text{где } m &= 45^\circ + \frac{A}{2}. \quad 78) \text{Возмож. при } m \geq (-3 \pm \sqrt{8}). \quad 79) x_1 = \frac{\pi}{4}, \\
 x_2 &= \frac{3\pi}{4}. \quad 80) \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^3 - 3(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x; \\
 \sin 2x_1 &= \frac{2}{m}; \sin 2x_2 = \frac{4}{-m \pm \sqrt{12-3m^2}}; \text{ передъ корнемъ надо взять «+»} \\
 \text{при } m > 0 \text{ и «-» при } m < 0. \quad 81) x &= \sqrt{4 - \frac{\pi}{2}} - 1. \quad 82) x_1 = \alpha, x_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha, \\
 x_3 &= \frac{\pi}{2} + \alpha, x_4 = \pi - \alpha, \text{ где } \alpha = 62^\circ 37' 56''. \quad 83) x_1 = 15^\circ 10' 50'', x_2 = 164^\circ 49' 10''. \\
 84) x &= 63^\circ 26' 6''. \quad 85) x_1 = 30^\circ, x_2 = 150^\circ. \quad 86) x = 60^\circ. \quad 87) x = 13^\circ 49' 28'', \\
 x_2 &= 166^\circ 10' 32''. \quad 88) \operatorname{tg} x = \frac{\sin 10^\circ}{\sqrt{\sin 10^\circ}}. \quad 89) x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = 0,41421. \\
 90) x_1 &= \frac{\sqrt{17}-3}{4}, x_2 = -\frac{\sqrt{17}+3}{4}. \quad 91) a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = -1. \quad 92) 6x^2 - x - 1 = 0; \\
 x_1 &= 1, x_2 = -\frac{1}{6}. \quad 93) x = \pm 6. \quad 94) x = \pm 4. \quad 95) x = 2. \quad 96) x = \sqrt{\frac{10-4\sqrt{2}}{17}}. \\
 97) x_1 &= \frac{1}{3}, x_2 = 1, x_3 = \frac{1}{2}. \quad 98) x = 51^\circ 51' 14''. \quad 99) x_1 = 0, x_2 = +\sqrt{3}, \\
 x_3 &= -\sqrt{3}; k\pi + a = 4a; a = k \frac{\pi}{3}. \quad 100) x = \frac{1}{\pm \sqrt{5}}.
 \end{aligned}$$

$$101) x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{\pi}{6}. 102) x = 20^{\circ} 39' 23'', y = 24^{\circ} 20' 34''. 103) x_1 = 0, y_1 = \frac{\pi}{2}; x_2 = \frac{\pi}{3}, y_2 = \frac{\pi}{6}. 104) x = 22^{\circ} 37' 51'', y = 7^{\circ} 22' 9''. 105) x = \frac{3\pi}{11}, y = \frac{\pi}{10}. 106) x = \frac{\alpha}{2} + k\pi, y = \frac{\alpha}{2} - k\pi. 107) x = \frac{2\pi}{3}, y = \frac{\pi}{6}. 108) x = k\pi + \frac{\pi}{4}, y = k\pi + \frac{3\pi}{4}. 109) x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, y = 0. 110) x + y = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, x - y = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}. 111) \sin^2 x [(k^2 - 4) \sin^2 x + 8(k^2 - 2)] = 0; x_1 = 0, \sin x_2 =$$

$$= \pm \frac{2\sqrt{2(2-k^2)}}{k^2-4}; y_1 = 0, \sin y_2 = \pm \frac{2k\sqrt{2(2-k^2)}}{k^2-4}. \text{ Усл. возм. } -\sqrt{2} < k < +\sqrt{2}. 112) \frac{x+y}{2} = k\pi + \theta, x - y = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}; x = 2k\pi + \theta \pm \frac{\pi}{3}, y = \theta \mp \frac{\pi}{3}. 113) x_1 = \frac{\pi}{6} - 2k\pi, x_2 = \frac{\pi}{2} - 2k\pi - 2\alpha; y_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi, y_2 = k\pi + \alpha; \text{ здѣсь } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{7}. 114) \text{ Биквадр. уравн. съ } \operatorname{tg} x.$$

$$115) \operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b}{1 + \operatorname{tg}^2 b}, \operatorname{tg}^2 y = \frac{\operatorname{tg}^2 b (1 + \operatorname{tg}^2 a)}{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b}.$$

$$116) \text{ Польз. форм. синусовъ, находимъ } 4 \cos^2 C - \sqrt{2} \cos C - 1 = 0; C = 45^{\circ}. 117) \operatorname{ctg} \varphi = 9, \varphi = 6^{\circ} 20' 25'', 1. 118) \operatorname{tg} x = \frac{3V}{\pi^2 C^3} - \operatorname{tg} \alpha; x = 64^{\circ} 3'.$$

$$119) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{4}; 5 \text{ метр.}, 11,25 \text{ метр. } 120) 2 \sin v = \cos^2 x; x = 24^{\circ} 23' 10''.$$

$$121) \sin i = \frac{3}{2} \sin \frac{i}{2}; i_1 = 0, i_2 = 82^{\circ} 49' 9''. 122) \frac{\sin x \operatorname{tg} x}{2(1 - \cos x)} = \frac{m}{n};$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = + \sqrt{\frac{m-n}{m}}; x = 60^{\circ}. 123) \operatorname{tg} \left( 45^{\circ} - \frac{A}{2} \right) = 2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}; A_1 = 31^{\circ} 22' 2'', 6;$$

$$A_2 = 23^{\circ} 38' \text{ (невозм.)}. 124) \sin x - 2 \cos x = \frac{S}{\pi k^2} - 2; x = 42^{\circ} 32' 16''$$

$$125) \frac{1 - \cos^2 \varphi}{3 - 2 \cos^2 \varphi} = \frac{5}{18}; \varphi = 52^{\circ} 14' 20''. 126) \text{ Если } -1,5 \leq a \leq -1, \text{ то}$$

$$\text{уравн. возм. Иск. корни пол. при } a = -1. 127) d^2 \cos^2 \alpha = d^2 + 4h^2 - 4dh \cos \alpha; \alpha = 45^{\circ}. 128) B = 74^{\circ} 19', C = 63^{\circ} 41'; a = 0,84234 \text{ метр.}, b = 1,1469 \text{ метр.}, c = 1,0387 \text{ метр. } 129) 2(\sin x + \cos x) = n \sin x \cos x. \text{ Возм. при } n \geq 4\sqrt{2}.$$

$$x_1 = 15^{\circ}, x_2 = 45^{\circ} \text{ [квад. атъ]}. 130) a = -2(3 - 2\sqrt{2}); \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$$

$$131) c(\sin B + \cos B) + c \sin B \cos B = n; \cos(45^{\circ} - B) = \frac{2\sqrt{1+n} - \sqrt{2}}{2};$$

$$\text{возм. при } 1 < n < \frac{2\sqrt{2}+1}{2}. \text{ При } n = \frac{3}{2} \text{ наход. } \cos(45^{\circ} - B) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(\sqrt{5}-1). 132) x = \arccos \frac{1}{3} - \arccos \frac{2}{3}; x = \arccos 0,9495; x = 22^{\circ} 20' 20''.$$

$$133) \text{ Система } x + y = 70^{\circ}, \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{63}{38} \text{ даетъ } x = 44^{\circ} 49' 58'', 4. 134) \text{ Иск.}$$

$$\text{сторона } = m; x + y = 60^{\circ}; a = m \sin x, l = m \sin y; m = 2 \sqrt{\frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)}. \text{ При } a = b = 5 \text{ имѣемъ } m = 10. 135) \text{ Исключая } R \text{ изъ системы;}$$

$$k_c 2R \sin A \sin B \text{ и } r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}, \text{ находимъ } \cos B =$$

$$= \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 8(h_c - r)^2}}{4(h_c - r)} . \text{ Далѣ } 0 < B < 45^\circ, \text{ слѣд. } 1 > \cos B > \frac{\sqrt{2}}{2} . \text{ Усл.}$$

возм.  $h_c > 2r$ .  $B=30^\circ$ ,  $A=90^\circ$ ,  $C=60^\circ$ . 136)  $\operatorname{ctg} x = d \operatorname{tg}(x + \alpha) - a$ :  $\cos(2x + \alpha) =$   
 $= -\sqrt{2} \sin 24^\circ 29'$ ;  $x = 52^\circ 40' 55''$ ;  $H=10$  метр. 137) Примѣняя 2-ую форм.

Мольвейде и форм. высотъ, находимъ  $\sin \frac{B-C}{2} = \sin \frac{A}{2} \pm \sqrt{1 - \frac{m}{a} \sin A}$ .

Усл. возможн.  $\frac{a}{m} \geq \sin A$ ;  $B_1=108^\circ 35' 25''$ ;  $B_2=71^\circ 23' 39''$ . 138) Уравнение

$n \sin A = \sin B \sin C \left( \operatorname{ctg} \frac{C}{2} - \operatorname{tg} \frac{B}{2} \right)$  даетъ  $\sin C = \frac{2-n}{2(n-1)}$ . Усл. возм.

$\frac{4}{3} < n < \frac{3}{2}$ ;  $C=33^\circ 33' 27''$ . Задача вообще неопредѣленная, т.-к. мало

данныхъ. 139)  $\frac{\beta_B}{a} = \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ . Усл. возможн.  $1 > \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , откуда

$\frac{3}{2} > \frac{a}{\beta_B} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Полагая  $\frac{a}{2\beta_B} = \operatorname{ctg} \varphi$ , находимъ  $\cos x = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$ .

140) Изъ сист.  $\frac{y}{2} - \frac{x}{2} = \alpha$ ,  $\frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{y}{2}} = m$  наход.  $\operatorname{tg} \frac{x+y}{4} = \frac{1+m}{1-m} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ;

$\frac{y}{2} = 108^\circ 26' 5''$ , 6. 141) Если  $x$  — уголъ прямой съ  $b$ , то  $\sin^2 x +$   
 $+ \sin^2(A-x) = \frac{m^2}{b^2}$ . Усл. возможн.  $2 \leq m^2 < 3$ . При  $m^2 = 2$  имѣемъ

$x = 30^\circ$ ; прямая — биссектрисса. 142) Система  $x+y = 135^\circ$ ,  $\frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{2}$ ,

гдѣ  $x$  и  $y$  — углы діагоналей квадрата со сторонами параллелограмма,  
 даетъ  $x=90^\circ$ ,  $y=45^\circ$  (безъ логарифмовъ). 143) Если  $x$  — общая разность,

то  $A=60^\circ - x$ ,  $C=60^\circ + x$ ,  $B=60^\circ$ ; далѣе  $\frac{\sin 2A + \sin 2C}{\sin 2A \sin 2C} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ ;

$\frac{4}{3} \cos^2 2x - \cos 2x - \frac{1}{3} = 0$ ;  $\cos^2 x = \frac{3}{8}$ . 144) Пусть  $\angle ADF = x$ ,

$\angle BCF = y$ ,  $\angle CBE = z$ . Тогда  $\operatorname{tg}(30^\circ - y) = \frac{1}{3 \operatorname{tg} x}$ ,  $\operatorname{tg}(30^\circ - z) = -\frac{1}{3 \operatorname{tg} x}$ ,

откуда  $y + z = 60^\circ$ . Итакъ.  $\angle BMC = 120^\circ$ ; это показываетъ, что  $M$  ле-  
 жить на окружности, описанной около  $\triangle ABC$ . 145)  $\cos \frac{B-C}{2} =$

$= \frac{\beta_A + \sqrt{\beta_A^2 + 8m^2}}{4m_a}$ . Усл. возможн.  $\beta_A > m_a$ ;  $B=75^\circ$ ,  $C=15^\circ$ . 146)  $\operatorname{tg} x =$

$= \frac{b \cdot \sin A}{c + b \cdot \cos A}$ ,  $\operatorname{tg} y = \frac{c \cdot \sin A}{b + c \cdot \cos A}$ . 147) Система  $B + C = \pi - A$  и

$\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin^2 \frac{A}{2}$  даетъ  $\cos \frac{B-C}{2} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{\pi + 3A}{12} \cos \frac{\pi - 3A}{12}$ .

Наиб. значеніе  $A$  при  $\pi - 3A = 0$ , т.-е.  $A = \frac{\pi}{3}$  (равност. тр-къ).

148)  $\cos \frac{B-C}{2} = 2 \sin \frac{A}{2}$ . Наиб. значеніе  $A$  при  $2 \sin \frac{A}{2} = 1$ , т.-е.

$$\begin{aligned}
 A=60^\circ; B=107^\circ 33' 38''. \quad 149) \sin \frac{C}{2} &= + \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{q}; C=60^\circ. \quad 150) \cos \frac{B-C}{2} = \\
 &= \sin \frac{A}{2} + \frac{2 \cos \frac{A}{2}}{m - \operatorname{ctg} \frac{A}{2}}. \quad \text{Усл. возможн. } A < 90^\circ. \quad \text{Если } A = 60^\circ, \text{ то} \\
 B = 90^\circ, C = 30^\circ.
 \end{aligned}$$


---

## ОГЛАВЛЕНИЕ II ЧАСТИ.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | СТР. |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Глава I. Измѣреніе угловъ и линій . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 97   |
| 1. Предѣлы измѣненія угловъ.—3. Радіальное измѣреніе угловъ.—4. Теорема.—5. Радіанъ.—6. Круговая мѣра угловъ.—8. Формулы перехода.—9. Таблицы перехода.—10. Понятіе о векторахъ.—11. Правило Декарта.—12. Измѣреніе прямыхъ отрѣзковъ и дугъ окружности.—14. Углы и ихъ функціи.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |      |
| Глава II. Общія свойства круговыхъ функцій . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 107  |
| 16. Опрежденія.—17. Построеніе круговыхъ функцій.—19. Синусъ-версусъ и косинусъ-версусъ.—20. Функціи дополнительнаго угла.—22. Функціи угловъ II-го квадранта.—25. Функціи угловъ III-го квадранта.—27. Функціи угловъ IV-го квадранта.—29. Функціи отрицательныхъ угловъ.—30. Мнемоническія правила для формулъ приведенія.—31. Примѣры.—32. Общее заключеніе.—Упражненія.—33. Измѣненіе круговыхъ функцій.—34. Измѣненіе синуса.—35. Графика синуса.—36. Измѣненіе тангенса.—37. Графика тангенса.—38. Измѣненіе секанса.—39. Графика секанса.—42. Периодичность круговыхъ функцій.—43. Непрерывность круговыхъ функцій. |      |
| Глава III. Главныя соотношенія между круговыми функціями.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |      |
| А. Система основныхъ соотношеній.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 136  |
| 44. Теорема.—45. Основные соотношенія.—46. Доказательство общности системы.—47. Слѣдствія.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |      |
| В. Теорема сложенія и ея слѣдствія                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 139  |
| 48. Сущность и значеніе теоремы.—49. Теорема проэкцій.—50. Слѣдствіе.—51. Теорема сложенія.—52. Слѣдствія.—53. Функціи суммы многихъ угловъ.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |      |
| С. Формулы для функцій двойныхъ и половинныхъ угловъ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 146  |
| 54. Двойные углы.—55. Функціи тройныхъ и многократныхъ угловъ.—56. Половинныя:                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |      |

углы.—57. Причина двойственности формулъ  
15-ой и 16-ой.—58. Формулы для  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  и  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ .—

59. Исслѣдованіе.—60. Функціи угла  $\frac{x}{n}$ .

Д. Выраженія функцій черезъ одну  
изъ нихъ . . . . .

154

62. Таблица.—63. Теорема.—Упражненія.

Глава IV. Вычисленіе круговыхъ функцій. . .

159

65. Основныя теоремы.—66. Предѣлы синуса.—  
67. Предѣлы косинуса.—69. Вычисленіе  $\sin 1'$  и  
 $\cos 1'$ .—70. Формулы Симпсона.—73. Повѣрка  
вычисленій.—74. Таблицы круговыхъ фун-  
кцій.—75. Интерполированіе.—76. Теорема IV.—  
77. Теорема V.—79. Предѣлы для интерполи-  
рованія.—80. Формулы Делямбра.—Примѣры и  
задачи.—82. Точность пятизначныхъ таблицъ.

Глава V. Разложеніе гониометрическихъ много-  
членовъ на множители.

А. Метода преобразованій . . . . .

189

86. Примѣры.—87. Формулы суммы и разности  
круговыхъ функцій.—88. Примѣры.—

В. Метода введенія вспомогательнаго  
угла . . . . .

204

89. Формула.—91. Примѣры.

Примѣры для упражненій . . . . .

210

Глава VI. Обратныя круговыя функціи.

А. Общія свойства . . . . .

213

93. Опредѣленія.—95. Графики обратныхъ кру-  
говыхъ функцій.—96. Непрерывность обрат-  
ныхъ круговыхъ функцій.—97. Многозначность  
обратныхъ круговыхъ функцій.—98. Трансцен-  
дентность обратныхъ круговыхъ функцій.—  
99. Построеніе обратныхъ круговыхъ функцій.—  
100. Общія формулы.—101. Вычисленіе обрат-  
ныхъ круговыхъ функцій.—102. Зависимость  
между обратными круговыми функціями.—  
103. Выраженія обратныхъ круговыхъ функцій  
черезъ одну изъ нихъ.—Примѣры для упраж-  
неній.—

В. Дѣйствія надъ обратными круго-  
выми функціями. . . . .

225

105. Сложеніе и вычитаніе.—106. Умноженіе.—

|                                                                                                                                                                                                                                |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 107. Дѣленіе. — 108. Общее замѣчаніе. — Примѣры. —                                                                                                                                                                             | СТР.       |
| <b>Глава VII. Гониметрическія уравненія . . .</b>                                                                                                                                                                              | <b>231</b> |
| 109. Опредѣленія. — 110. Рѣшеніе уравненія. — 111. Замѣчанія.                                                                                                                                                                  |            |
| А. Главныя методы рѣшенія . . .                                                                                                                                                                                                | 233        |
| 112. Метода приведенія. — 113. Теорема Біоша. — Примѣры. 115 — Метода разложенія. — Примѣры. — 117. Метода сравненія. — Примѣры. —                                                                                             |            |
| В. Рѣшеніе нѣкоторыхъ типичныхъ уравненій и системъ . . . . .                                                                                                                                                                  | 245        |
| 119. Уравненіе $a \sin x + b \cos x = c$ . — 121. Уравненіе $aF''(x) + bF'(x) + c = 0$ . — 122. Уравненіе показательное. — 123. Уравненія, содержащія обратныя круговыя функціи. — 124. Системы уравненій съ 2 неизвѣстными. — |            |
| С. Задачи на составленіе и изслѣдованіе уравненій . . . . .                                                                                                                                                                    | 253        |
| 127. Задача Паппуса. — 128. Задача Альгазена. — 129. Задача Паскаля. — 130. Задача Потенота. — 131. Задача съ 3 неизвѣстными (Васс., Lyon, 1907). —                                                                            |            |
| <b>Примѣры и задачи .</b>                                                                                                                                                                                                      | <b>271</b> |
| <b>Отвѣты и рѣшенія .</b>                                                                                                                                                                                                      | <b>280</b> |
| <b>Оглавленіе.</b>                                                                                                                                                                                                             |            |